MÉMOIRE

SUR

L'ÉQUATION SÉCULAIRE

DU

MOYEN MOUVEMENT DE LA LUNE

PAR

JEAN PLANA





TURIN

DE L'IMPRIMERIE ROYALE

1856.

EXTRAIT DES MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE TURIN

Série II. Tome XVIII

MÉMOIRE

SUR

L'ÉQUATION SÉCULAIRE

DU

MOYEN MOUVEMENT DE LA LUNE

Lu dans la Séance du premier juin 1856.

Je me propose de démontrer dans ce Mémoire, que l'expression analytique du coefficient de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune que j'ai donnée à la page 485 du premier Volume de ma *Théorie du mouvement de la Lune*, doit être complétée par l'addition des termes suivans; savoir

$$\left\{\begin{array}{l} +\frac{1485}{128}m^4+\frac{4779}{64}m^5+\frac{178949}{512}m^6+\frac{81323}{64}m^7 \\ -e^2\left(\frac{2655}{64}m^3+\frac{199215}{512}m^4\right) \\ -\gamma^2\left(\frac{99}{128}m^3-\frac{3501}{512}m^4\right)+\frac{45}{64}m^2b^4 \end{array}\right\}\cdot\int dv(\varepsilon'^2-E'^2)$$

$$-\frac{103059}{2048}m^4\int dv(\varepsilon'^4-E'^4)\ :$$

de sorte que l'on aura

[k] .... $\int \zeta\, dv =$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{3}{2}m^2 - \frac{351}{64}m^4 + \frac{81}{16}m^5 - \frac{268915}{256}m^6 + \frac{212575}{128}m^7 \\ & + e^2\left(\frac{1461}{128}m^2 + \frac{85095}{512}m^3 + \frac{2080989}{1024}m^4\right) \\ & + \gamma^2\left(\frac{525}{128}m^2 + \frac{687}{512}m^3 - \frac{48183}{1024}m^4\right) \\ & + b^4\left(\frac{75}{32} - \frac{675}{32}m + \frac{98775}{512}m^2 + \frac{75}{8}e^2 - \frac{225}{64}\gamma^2\right) \\ & - m^2\left(\frac{2709}{256}e^2\gamma^2 + \frac{2229}{256}\gamma^4 + \frac{8367}{128}e^4 + \frac{9}{4}m^2 E'^2\right) \end{aligned} \right\} \int dv\,(\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+ \left\{\frac{15}{8}m^2 + \frac{2203365}{2048}m^4 + \frac{25455}{1024}m^2e^2 + \frac{11919}{1024}m^2\gamma^2 + \frac{75}{16}b^4\right\} \int dv\,(\varepsilon'^4 - E'^4).$$

Ici, je fais abstraction des termes du 7.ième ordre multipliés par m^5e^2, $m^5\gamma^2$, m^3e^4, $m^3\gamma^4$, $m^3e^2\gamma^2$, $m^3E'^4$, m^3b^4, parceque leur totalité n'a pas été comprise dans les développements exécutés.

En réduisant ces quantités en nombres, et posant

$$\int \zeta\, dv = C\int dv\,(\varepsilon'^2 - E'^2) + C'\int dv\,(\varepsilon'^4 - E'^4)\ ,$$

l'on aura

$$C = 0{,}00839285\,(2) + 0{,}000221442\,(4)$$
$$+ 0{,}00021564\,1\,(5) - 0{,}00000540228\,(6)$$
$$+ 0{,}0000217604\,(7) = 0{,}00884629\,1\ ;$$

$$C' = 0{,}010491063\,(2) + 0{,}03465801\,(4) = 0{,}04514907\ ,$$

au lieu du résultat donné à la page 605 du même Volume.

Nous avons

$\text{Log.}\,C = 7{,}9467613$; $\qquad$ $\text{Log.}\,C' = 8{,}6546481$;

$\text{Log.}\,1264'',127 = 3{,}1017907$; $\qquad$ $\text{Log.}\,0'',6995 = 9{,}8447877$,

donc, en prenant

$$\frac{1+\mu_i^{iv}}{1047,871} \text{ pour la masse de } \textit{Jupiter};$$

$$\frac{1+\mu_i'}{401839} \text{ pour la masse de } \textit{Vénus};$$

$$\frac{1+\mu_i'''}{2680337} \text{ pour la masse de } \textit{Mars};$$

les équations posées dans les pages 596 et 597 donneront

$$C\int(\varepsilon'^2-E'^2)\,n\,dt=$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2\left\{\begin{array}{l}11'',18182+0'',017086+0'',10611+0'',17497\\+1'',7028.\mu_i'-2'',1237.\mu_i'''+9'',488.\mu_i^{iv}\end{array}\right\}$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^3 0'',018669\ ;$$

$$C'\int(\varepsilon'^4-E'^4)\,n\,dt=-\left(\frac{t}{100}\right)^2 C'.0'',6995=-\left(\frac{t}{100}\right)^2 0'',031582\ ;$$

d'où l'on tire

$$(k')\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \int\zeta\,dv=$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^2\left\{11'',51157+1'',7028.\mu_i'-2'',1237.\mu_i'''+9'',488.\mu_i^{iv}\right\}$$

$$-\left(\frac{t}{100}\right)^3 0'',018669\ (*).$$

En calculant les anciennes éclipses de Lune ou de Soleil, à l'aide de la formule (k'), on obtient un accord fort satisfaisant entre la théorie et l'observation. L'éclipse de Lune observée à Babylone le 19 mars de l'année 720 avant notre ère est représentée avec une différence moindre de deux minutes (1'.6"). L'éclipse de Soleil observée par Théon à Alexandrie le 16 juin de l'année 364 avant notre ère est représentée avec une différence d'une *minute* et 25 *secondes*. Les deux éclipses de Soleil

(*) Voyez la Note à la fin de ce Mémoire, où j'ai donné l'équation séculaire pour un *temps indéfini en termes périodiques*.

observées près du *Caire* le 12 décembre de l'année 977 et le 8 juin de l'année 978, après notre ère, sont représentées avec une différence moindre de 4′ (3′, 40″).

Ces éclipses étant arrivées fort près des apsides de la Lune, il serait facile de diminuer cette différence en faisant varier l'anomalie de la Lune d'environ 40′. Mais nous n'insistons pas sur les comparaisons de ce genre, parceque la théorie a maintenant une telle certitude qu'il devient inutile d'établir des comparaisons avec des observations qui ne sont pas à l'abri de toute objection sur le degré de leur exactitude.

Sur le coefficient 11″, 51157 que je trouve ici après des calculs théoriques dont l'exécution est très-difficile, je dois faire une remarque propre à justifier une telle difficulté; autrement on pourrait objecter que le coefficient 11″, 135, publié par LAPLACE le 19 novembre de l'année 1787, en est fort approchant quoique trouvé d'après un calcul sans comparaison plus simple. Mais en examinant de près la question on verra, que LAPLACE n'a jamais calculé le *second* terme de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, ni en 1787, ni en 1802, époque de la publication du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste. Il avait borné la recherche au premier terme $\frac{3}{2} m^2 \int dv\,(\varepsilon'^2 - E'^2)$ de cette équation. Sans une altération qu'il faisait subir par son calcul au second facteur, il aurait trouvé un coefficient *inférieur* à 10″,3, comme à la page 273 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste. Le contraste entre les quantités positives et les quantités négatives au de-là du premier terme est la cause radicale qui augmente la difficulté de ce développement.

LAGRANGE en 1792 a aussi borné l'approximation au seul premier terme (Voyez la page 296 du Volume de l'Académie de Berlin pour les années 1792-93).

Il y a un autre résultat sur lequel je dois fixer d'avance l'attention du Lecteur de ce Mémoire. En considérant, séparément, la partie de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, qui, par une combinaison particulière, naît, en vertu des intégrations, des termes périodiques multipliés par le coefficient différentiel $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ de la variation séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, on obtiendrait une quantité, qui, par sa forme, paraît devoir être une partie intégrante de cette même équation. Mais, en examinant de plus près l'origine de cette partie,

j'ai reconnu, que son addition avec la partie primitive est inadmissible. On verra, que les termes du 4.ième et du 5.ième ordre dérivés de cette source sont;

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{855}{16}m^4-\frac{195}{16}m^2e^2-\frac{39}{64}m^2\gamma^2-\frac{75}{32}b^4 \\ -\frac{36963}{64}m^5-\frac{22593}{128}m^3e^2+\frac{2937}{512}m^3\gamma^2+\frac{675}{64}m\,b^4 \end{array}\right\}.\int dv\,(\varepsilon'^2-E'^2)\,;$$

et en calculant les suivans, on réduirait le coefficient de l'équation séculaire à un tel degré de petitesse qu'il serait incompatible avec les observations, soit anciennes, soit modernes. Toutefois, indépendamment de cette considération indirecte, on peut démontrer, que la suppression complète de cette partie est exigée par la méthode même des approximations successives sur laquelle est fondée toute la théorie qui fournit les coefficiens des inégalités lunaires.

L'équation séculaire de l'anomalie, et l'équation séculaire de l'argument de la latitude de la Lune sont étroitement liées avec celle du moyen mouvement déterminée par l'équation (k). J'ai rapporté les deux premières en finissant le 4.ème §, afin de présenter réunies dans ce Mémoire l'expression analytique des trois équations séculaires qui affectent le mouvement du centre de gravité du globe de la Lune et celui des élémens de son orbite.

La distinction entre le centre de gravité et le centre de figure de la Lune devient maintenant nécessaire: car l'on a motif de croire le premier plus éloigné du centre de la Terre d'environ les 35 millièmes du rayon du globe de la Lune (Voyez la page 31 du Tome XXIV que vient de publier la Société Astronomique de Londres).

En réfléchissant sur l'analyse qui nous a donné ce résultat capital, relativement aux équations séculaires, on sentira qu'il serait impossible de l'obtenir sans avoir les coefficiens de toutes les inégalités lunaires sous une forme *littérale* et *explicite*.

La loi des variations de l'équation séculaire, sous forme finie, que j'ai placée dans une Note qui termine ce Mémoire, complète cette théorie d'une manière nouvelle.

Je vais exposer l'analyse qui m'a fourni les résultats que je viens d'énoncer.

§ I.

Considérations sur les formules exposées dans les pages 60 et 61 du 1.er Volume de ma Théorie du Mouvement de la Lune.

Il y a dans la dernière ligne de la page 61 du 1.er Volume de ma Théorie de la Lune un résultat exact, mais précédé d'une singulière faute typographique, dont j'ai reconnu l'existence (peu de jours avant la moitié du mois d'avril de cette année) en relisant la Note que j'avais présentée à l'Académie des Sciences de Turin le 17 décembre 1854. Voici la correction qui doit être faite dans cette page, et les nouveaux éclaircissemens, que cette circonstance exige de ma part, pour établir la véritable forme des termes dépendans des coefficiens différentiels des élémens de l'orbite du Soleil, et discuter leur influence sur l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

La valeur de x qui termine la page 61 est équivalente à la somme de ces trois termes ; savoir

$$[1]\ldots\ x = -\frac{B}{k}\varepsilon'^{m}\cos.(kv+\beta-n\tau') - \frac{Bn}{k^2}\cdot\frac{d\tau'}{dv}\varepsilon'^{m}\cos.(kv+\beta-n\tau')$$
$$+\frac{Bm}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(kv+\beta-n\tau')\ :$$

et c'est effectivement ainsi que je l'avais obtenue par le calcul exposé. D'ailleurs, la phrase « *l'on peut réunir ces trois termes en un seul* » indique, assez clairement, que les *trois* termes existaient dans le manuscrit : mais, dans l'avant-dernière expression de x, le troisième terme a été omis, et cette faute typographique m'est complètement échappée. De là il est arrivé, que, en composant la Note du 17 décembre 1854, je n'ai pas fait attention à l'omission du terme

$$+\frac{Bm}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(kv+\beta-n\tau')$$

qui devait faire partie de la valeur de x qui précède immédiatement la

dernière. En conséquence de cette omission je voyais seulement le terme multiplié par $\varepsilon'^m \frac{d\tau'}{dv}$, et je croyais à la destruction de celui multiplié par $m\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}$. C'est à cette circonstance qu'il faut attribuer ma manière de voir alors la non existence des termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ dans les expressions de δu et δnt. Maintenant que j'ai rétabli, en refaisant le calcul de la page 61, le véritable trinome à la place du monome égal à la valeur de x, je reconnais que l'intégration introduirait des termes séculaires dans l'intégrale des produits de la forme

$$x.B'.\varepsilon'^m.\sin.(kv+\beta-n\tau').dv\ :$$

car il y aurait le terme

$$\int\frac{BB'm}{k^2}.\varepsilon'^{2m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}.\sin.^2(kv+\beta-n\tau')dv$$
$$=\int\frac{BB'm}{2k^2}.\varepsilon'^{2m-1}d\varepsilon'=\frac{BB'}{4k^2}.\varepsilon'^{2m}\ ,$$

si effectivement on devait exécuter des intégrations de ce genre pour développer les fonctions qui donnent les termes successivement ajoutés aux équations différentielles. Cela prouve que l'existence des termes de la forme

$$G\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}.\sin.(kv+\beta-n\tau')$$

dans l'expression de δu est incontestable. Mais cela ne prouve pas en même temps qu'on doive traiter cette partie de δu comme si elle constituait une approximation subséquente d'un ordre déterminé. Leur forme est semblable à celle du terme $Q\sin.(iv+\beta)$, dont LAPLACE a signalé l'existence à la page 214 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste.

Le facteur $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ est très-petit ; mais on ne saurait lui attribuer un ordre de petitesse déterminé, comme on le fait à l'égard de ε', ε'^1, ε'^2, etc. Ces termes multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ sont le résultat d'un développement opéré sur les coefficiens et sur les argumens des fonctions périodiques. D'après

cela on doit employer ces fonctions avec des circonspections analogues à celles que l'on observe pour éviter le développement de l'arc dans l'intégration des équations différentielles du mouvement des planètes. Nous ferons remarquer, dès ce moment, que, en intégrant l'équation

$$\frac{d.\delta n t}{dv} = \Sigma . H \iota'^{g} \sin.(kv + \beta - g'\tau') \;,$$

on aura des termes périodiques dans l'expression de $\delta n t$, multipliés par $g\iota'^{g-1}\frac{d\iota'}{dv}$, lesquels en produisent dans la partie $\int \delta R' dv$ de l'intégrale $\int R_{,} dv$; car, en ayant égard aux termes tels que

$$\frac{3}{2} q \int \frac{\delta[(\alpha' u')^2 \sin.(2v - 2v')]}{u_{,}^{4}} dv \;,$$

on les voit naître dans la valeur de $\delta R'$ posée à la page 273 de mon 1.er Volume.

Pour avoir les termes de même espèce, mais d'origine différente, contenus dans le coefficient que j'ai désigné par Π à la page 263 du 1.er Volume, il faut avoir, séparément, ceux multipliés par ι'^{2}, qui se trouvent dans l'expression de l'intégrale $m^2 \int R' dv$; c'est-à-dire dans le coefficient de $\cos. o v$ qui fait partie du second membre de l'équation

$$\frac{d.\delta n t}{dv} = -2\delta u + m^2 \int R' dv + \text{etc.}$$

Et à cet effet voici comment on doit exécuter le calcul de ces termes, en reprenant les premières formules posées dans la page 60.

Considérons un terme de la forme

$$x = B \int \iota'^{g} \sin.(kv + \beta - g'\tau').dv \;,$$

l'on a d'abord;

$$x = B \int dv.\sin.(kv + \beta).\iota'^{g} \cos.g'\tau' - B \int dv.\cos.(kv + \beta).\iota'^{g} \sin.g'\tau' \;.$$

Or, en posant

$$\iota'^{g} \cos.g'\tau' = \Sigma \cdot M \cos.(pn't + q) = \Sigma \cdot M \cos.(pm.nt + q) \;,$$

il faudra remplacer nt par $v+\delta v$, et regarder δv comme le représentant de la totalité des termes *périodiques* qui entrent dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de la longitude vraie, désignée par v. Alors l'on a

$$\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau' = \Sigma\cdot M\cos.(pmv+q+pm\delta v) \; .$$

Donc, en développant suivant les puissances de δv, et retenant seulement la première, nous aurons

$$\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau' = \Sigma\cdot M\cos.(pmv+q) + \delta v.\frac{d.\Sigma\cdot M\cos.(pmv+q)}{dv} \; .$$

Pour plus de simplicité j'écris

$$\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau' = [\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'] + \delta v.\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv} \; ;$$

où la fonction, renfermée entre les paranthèses carrées, est censée représenter la totalité des termes *absolument séculaires*, ayant les argumens $pm.v+q$, affectés des coefficiens pm, formés du produit de $m=\frac{1}{13}$ par les très-petits coefficiens p dépendans des masses des planètes, qui sont les seuls dont j'entendais parler dans les pages 60 et 61. D'après cette notation, la valeur précédente de x deviendra

$$[2]\ldots \quad x = B\int dv\sin.(kv+\beta)\left\{[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'] + \delta v.\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv}\right\}$$
$$- B\int dv\cos.(kv+\beta)\left\{[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'] + \delta v.\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']}{dv}\right\} \; .$$

Cela posé, si l'on considère le terme périodique de δv, dépendant du *même* argument $kv+\beta-g'\tau'$, l'on aura une expression de cette forme;

$$[3]\ \ldots\ \delta v = A\sin.(kv+\beta).[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'] - A\cos.(kv+\beta).[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'] \; .$$

Donc, en substituant cette valeur dans celle de x et retenant seulement les termes séculaires multipliés par AB, l'on aura

$$x = \frac{AB}{2}\int dv[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'].\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv}$$
$$+ \frac{AB}{2}\int dv[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'].\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']}{dv} \; ;$$

c'est-à-dire en exécutant l'intégration

[4] ..... $$x=\frac{AB}{4}\left\{[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']^{2}+[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']^{2}\right\}.$$

Cette formule, lorsque $g'=g$, et lorsque $g'=0$, donne

[5] .... $$x=\frac{AB}{4}.\varepsilon'^{2g}.$$

Mais si au lieu de l'équation [3] l'on avait

[6] .... $$\delta v=A\sin.(kv+\beta),$$

l'équation [2] donnerait le seul terme

[7] ..... $$x=\frac{AB}{2}\int dv\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv}=\frac{AB}{2}.\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'.$$

Il y a un troisième cas; c'est celui où, au lieu de l'équation [3], l'on aurait

$$\delta v=A\varepsilon'^{\lambda}\sin.(kv+\beta-g'\tau');$$

c'est-à-dire

$$\delta v=A\varepsilon'^{\lambda-g}\left\{\sin.(kv+\beta)\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]-\cos.(kv+\beta)\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]\right\};$$

alors la valeur de x est

$$x=\frac{AB}{2}\int dv.\varepsilon'^{\lambda-g}\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau']}{dv}$$
$$+\frac{AB}{2}\int dv.\varepsilon'^{\lambda-g}\left[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'\right]\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau']}{dv}.$$

En intégrant par parties, il viendra

$$x=\frac{AB}{4}\varepsilon'^{\lambda-g}\left\{\left[\varepsilon'^{g}\cos.g'\tau'\right]^{2}+\left[\varepsilon'^{g}\sin.g'\tau'\right]^{2}\right\}$$
$$-\frac{AB}{4}(\lambda-g)\int dv.\varepsilon'^{\lambda-g-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\varepsilon'^{2g};$$

d'où l'on tire

(a) ..... $$x=\frac{AB}{4}.\varepsilon'^{\lambda+g}-\frac{AB}{4}\cdot\frac{(\lambda-g)}{\lambda+g}.\varepsilon'^{\lambda+g}=\frac{AB}{4}\cdot\frac{2g}{(\lambda+g)}.\varepsilon'^{\lambda+g}:$$

on voit par là que ce produit est *nul*, lorsque $g=0$.

Les formules [5], [7] et (*a*) donnent les termes séculaires nés de l'intégrale $-2m^2\int R'dv$ sans la considération des termes périodiques multipliés par $\frac{d\epsilon'}{dv}$, que l'on aurait en intégrant l'expression de $\frac{d.\delta v}{dv}.dv$. Leur existence tient à l'élimination de la longitude moyenne $n't = m.nt$ du Soleil en fonction de la longitude v de la Lune.

§ II.

Calcul des termes constans du 4.ième ordre appartenans au coefficient de ϵ'^2 dans le développement des deux intégrales

$$-2m^2\int R'dv\ , \qquad -2m^2\int \delta R'.dv\ .$$

En prenant dans la page 336 du 1.er Volume les trois termes

$$[8]\ldots\quad R' = -\frac{15}{4}\epsilon'^2\sin.2Ev$$
$$-\frac{3}{4}\epsilon'\sin.(2Ev + c'mv) + \frac{21}{4}\epsilon'\sin.(2Ev - c'mv)\ ;$$

et dans les pages 490, 491 les trois termes

$$[9]\ldots\quad \delta v = -\frac{11}{8}m^2\sin.2Ev$$
$$+\frac{11}{16}m^2\epsilon'\sin.(2Ev + c'mv) - \frac{77}{16}m^2\epsilon'\sin.(2Ev - c'mv)\ ,$$

on calculera le premier par la formule [7] en y faisant $g' = 0$, $g = 2$; ce qui donnera

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{11}{8}m^2\epsilon'^2 = \frac{165}{64}m^2\epsilon'^2\ .$$

Et pour les deux autres on fera usage de la formule [5] en y faisant $g = 1$; ce qui donnera pour leur somme

$$x=\left(-\frac{3}{4.4}\cdot\frac{11}{16}-\frac{21}{4.4}\cdot\frac{77}{16}\right)m^2\varepsilon'^2\ ;$$

$$x=\left(-\frac{33}{256}-\frac{1617}{256}\right)m^2\varepsilon'^2.$$

L'on a donc

$$[10]\ldots\quad -2m^2\int R'dv=\left(-\frac{165}{32}+\frac{33}{128}+\frac{1617}{128}=\frac{495}{64}\right)m^4\varepsilon'^2\ .$$

Les trois termes de l'équation [8] donneront, conformément au troisième terme de la formule [1],

$$[11]\ldots\quad -2\int R'dv=\ \frac{15}{4}\cdot\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev+\frac{3}{8}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv)$$
$$-\frac{21}{8}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ .$$

Donc, en considérant seulement les quatre argumens $c'mv$, $2Ev$, $2E+c'mv$, $2Ev-c'mv$, l'équation (B), posée dans la page 72 du second Volume de mon ouvrage, sera réduite à celle-ci;

$$[12]\ \ldots\ldots\ldots\quad -\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$$

$$+\frac{3}{2}m^2\varepsilon'\cos c'mv-\frac{15}{2}m^2\varepsilon'^2\cos.2Ev$$

$$-\frac{3}{2}m^2\varepsilon'\cos.(2Ev+c'mv)+\frac{21}{2}m^2\varepsilon'\cos.(2Ev-c'mv)$$

$$+\frac{357}{16}m^3\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.c'mv+\frac{15}{4}m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev$$

$$+\frac{3}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{21}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ ;$$

où le terme $+\frac{357}{16}m^3\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.c'mv$ est donné par l'intégrale

$$-2m^2\int\delta R'dv\ ,$$

d'après la valeur de $\delta R'$ trouvée à la page 81 du même Volume, et le troisième terme de la formule désignée par [1] dans ce Mémoire.

Pour intégrer cette équation, en ayant égard à la variation séculaire des termes multipliés par des *cosinus*, remarquons, que, en faisant $i^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2$, un terme quelconque de la forme

$$B\varepsilon'^g \cos.(kv + \beta - g'\tau')$$

introduit dans la valeur de δu la fonction

$$\frac{B\cos.iv}{i}\int \varepsilon'^g \cos.(kv + \beta - g'\tau')\sin.iv.dv$$

$$-\frac{B\sin.iv}{i}\int \varepsilon'^g \cos.(kv + \beta - g'\tau')\cos.iv.dv \;.$$

Or, en exécutant cette intégration d'après la formule [1], on trouvera que le terme correspondant de δu se réduit à

$$[13]\;\ldots\quad \delta u = -\frac{2Bk.\varepsilon'^g}{(k^2 - i^2)^2}\left\{\begin{array}{l} g\,\dfrac{d\varepsilon'}{\varepsilon'.dv}\sin.(kv + \beta - g'\tau') \\ -g'\,\dfrac{d\tau'}{dv}\cos.(kv + \beta - g'\tau') \end{array}\right\}.$$

En appliquant cette formule au second membre de l'équation [12], et faisant $E = 1$, $i = 1$ (ce qui suffit pour l'approximation actuelle), on trouvera que les termes multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, sont

$$\delta u = -\left(3 + \frac{357}{16}\right)m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.c'mv + m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{20}{3} + \frac{5}{4}\right)\sin.2Ev$$

$$+ m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\right)\sin.(2Ev + c'mv)$$

$$- m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{14}{3} + \frac{7}{8}\right)\sin.(2Ev - c'mv)\;,$$

de sorte que l'on a;

$$[14] \ldots \quad \delta u = -\frac{405}{16} m^3 \frac{d\varepsilon'}{dv} \sin. c'mv + \frac{95}{12} m^2 \varepsilon' \frac{d\varepsilon'}{dv} \sin. 2Ev$$

$$+ \frac{19}{24} m^2 \frac{d\varepsilon'}{dv} \sin. (2Ev + c'mv)$$

$$- \frac{133}{24} m^2 \frac{d\varepsilon'}{dv} \sin. (2Ev - c'mv) \ .$$

D'après les résultats que j'ai donnés dans les pages 273, 331 et 336 du 1.er Volume, l'intégrale $-2m^2 \int R_i dv$ contiendra un terme multiplié par δu, et un autre multiplié par $m \delta nt$, lesquels, en considérant seulement les trois argumens $2Ev$, $2Ev + c'mv$, $2Ev - c'mv$, donneront

$$[15] \ldots\ldots\ldots\ldots \quad -2m^2 \int \delta R'.dv =$$

$$12m^2 \int dv.\delta u \left\{ \begin{array}{l} \left(1 - \frac{5}{2}\varepsilon'^2\right) \sin. 2Ev \\ -\frac{1}{2}\varepsilon' \sin. (2Ev + c'mv) + \frac{7}{2}\varepsilon' \sin. (2Ev - c'mv) \end{array} \right\}$$

$$- 2m^3 \int dv.\delta nt \left\{ \begin{array}{l} \left(-3 + \frac{15}{2}\varepsilon'^2\right) \cos. 2Ev \\ +\frac{3}{4}\varepsilon' \cos. (2Ev + c'mv) - \frac{63}{4}\varepsilon' \cos. (2Ev - c'mv) \end{array} \right\} .$$

Mais ces fonctions doivent être ajoutées au second membre de l'équation [12], lorsque il est question d'une approximation *subséquente*, et on doit y faire $\delta u = 0$, $\delta nt = 0$, à l'égard de l'approximation *actuelle*, puisque les termes qu'elles pouvaient fournir sont déjà compris dans le second membre de l'équation [12]. C'est de quoi je donnerai une démonstration générale vers la fin de ce Mémoire. Néanmoins, j'ai voulu calculer les termes séculaires, qui dérivent des termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, afin de mettre en évidence l'énorme altération qui en résulterait dans le coefficient de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune, si on voulait les ajouter à ceux obtenus en supposant

$\frac{d\varepsilon'}{dv} = 0$. Tel est le motif du développement des termes séculaires obtenus, de cette manière, par l'intégrale $-2m^2\int \delta R'.dv$ que je vais exposer, quoique, en dernière analyse, ils doivent être supprimés.

Cela posé on aura, d'après l'équation [14], pour la partie séculaire (bornée aux termes multipliés par m^4);

$$[16]\ldots \quad -2m^2\int \delta R'.dv = m^4\int \varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{95}{2}-\frac{19}{8}-\frac{931}{8}\right)dv = -\frac{285}{8}m^4\varepsilon'^2.$$

Mais il y a trois autres termes du *même* ordre qui doivent être calculés de la manière suivante.

Le second membre de l'équation [12] contient aussi les trois termes

$$+\frac{75}{4}m^2e\varepsilon'^2.\cos.(2Ev-cv)$$
$$+\frac{15}{4}m^2e\varepsilon'.\cos.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{105}{4}m^2e\varepsilon'.\cos.(2Ev-c'mv-cv),$$

lesquels étant intégrés d'après la formule [13] donnent

$$\delta u = -\frac{75.m^2e(1-2m)}{\left[(1-2m)^2-1\right]^2}\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-cv)$$
$$-\frac{15}{2}\cdot\frac{m^2e(1-m)}{\left[(1-m)^2-1\right]^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$
$$+\frac{105}{2}\cdot\frac{m^2e(1-3m)}{\left[(1-3m)^2-1\right]^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv-cv);$$

donc, en retenant seulement le premier terme du coefficient, il est clair que l'on a

$$[17]\ldots\ldots \quad \delta u = -\frac{75}{16}e\frac{\varepsilon' d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-cv)$$
$$-\frac{15}{8}e\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$
$$+\frac{35}{24}e\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv-cv).$$

Cela posé, si l'on ajoute au second membre de l'équation [15] les termes

$$12\,m^2\int dv.\delta u\left\{\begin{array}{l}-2.e\sin.(2Ev-cv)\\+1.e\epsilon'\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\-7.e\epsilon'\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{array}\right\},$$

l'on aura

[18] .... $-2m^2\int\delta R'.dv=$

$$12.m^2e^2\int\epsilon'\frac{d\epsilon'}{dv}dv\left(+\frac{75}{16}-\frac{15}{16}-\frac{245}{48}\right)=-\frac{65}{8}m^2e^2.\epsilon'^2.$$

L'équation (A) donnée à la page 35 du second Volume contient les termes suivans;

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2}-\left(1+\frac{3}{2}m^2\right)\delta s=$$

$$\sin.(2Ev-gv)\gamma\left(-\frac{3}{2}m^2+\frac{15}{4}m^2\epsilon'^2\right)$$

$$+\frac{3}{4}m^2\epsilon'\gamma\sin.(2Ev+c'mv-gv)-\frac{21}{4}m^2\epsilon'\gamma\sin.(2Ev-c'mv-gv).$$

Donc en intégrant conformément à la formule [13], et retenant seulement le premier terme, l'on aura;

[19] ..... $\delta s=+\frac{15}{16}\gamma\epsilon'\frac{d\epsilon'}{dv}\cos.(2Ev-gv)$

$$+\frac{3}{8}\gamma\frac{d\epsilon'}{dv}\cos.(2Ev+c'mv-gv)$$

$$-\frac{7}{24}\gamma\frac{d\epsilon'}{dv}\cos.(2Ev-c'mv-gv).$$

Il suit de là, que la fonction

$$-q\left(\frac{a}{a_1}\right)\delta T=\frac{3}{2}.2\gamma\sin.gv.\delta s+\text{etc.}$$

qui entre dans le second membre de l'équation (II)'' donnée à la page 276 du 1.er Volume de ma Théorie de la Lune, introduit dans le second membre de l'équation [12] les trois termes;

$$+\frac{45}{32}\gamma^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev$$

$$+\frac{9}{16}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{7}{16}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ .$$

lesquels, par l'intégration, donnent;

[20] .... $$\delta u=+\frac{15}{32}\gamma^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.2Ev$$

$$+\frac{3}{16}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$-\frac{7}{48}\gamma^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(2Ev-c'mv)\ .$$

Donc, d'après l'équation [15], l'on aura;

[21] .... $$-2m^2\int\delta R'dv=$$

$$12m^2\gamma^2\int dv\left(\frac{15}{64}-\frac{3}{64}-\frac{49}{192}\right)\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}=-\frac{13}{32}m^2\gamma^2\varepsilon'^2\ .$$

Le terme affecté de l'argument $Ev+c'mv$ donné à la page 73 du second Volume introduit dans l'équation [12] le terme

$$+\frac{15}{8}m^2b^2.\varepsilon'\cos.(Ev+c'mv)\ ,$$

lequel étant intégré d'après la formule [13] donne

$$\delta u=-\frac{15}{4}\cdot\frac{m^2b^2(1-m+c'm)}{\left[(1-m+c'm)^2-1+\frac{3}{2}m^2\right]^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ ;$$

et comme on peut faire $c'=1$, il est clair que l'on a;

[22] ...... $$\delta u=-\frac{5}{3}\cdot\frac{b^2}{m^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ .$$

D'après la valeur de $\delta R'$ donnée à la page 273 du 1.er Volume, et le développement donné à la page 343 du même Volume, nous avons le terme

$$-2m^2\int dv.\delta R' = +\frac{15}{4}m^2b^2\int dv.\delta u.\varepsilon'\sin.(Ev+c'mv) ;$$

duquel on tire

$$[23]\ \ldots\quad -2m^2\int dv.\delta R' = -\frac{25}{8}b^4\int dv.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv} = -\frac{25}{16}b^4\varepsilon'^2 .$$

Maintenant, si l'on désigne par $\int'\zeta dv$ la partie de $\int\zeta dv$, née du développement de l'intégrale $-\frac{3}{2}.2m^2\int R'dv$, et par $\int''\zeta dv$ la partie de $\int\zeta dv$, née du développement de l'intégrale $-\frac{3}{2}.2m^2\int\delta R'dv$, par la considération des termes périodiques de δu multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, l'on aura, *séparément;* en vertu de l'équation [10];

$$[24]\ \ldots\ldots\quad \int'\zeta dv = +\frac{1485}{128}m^4\int dv(\varepsilon'^2 - E'^2) ,$$

et, d'après les équations [16], [18], [21] et [23],

$$[25]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad \int''\zeta dv =$$

$$\left(-\frac{855}{16}m^4 - \frac{195}{16}m^2e^2 - \frac{39}{64}m^2\gamma^2 - \frac{75}{32}b^4\right)\int dv(\varepsilon'^2 - E'^2) .$$

On verra plus loin la cause intrinsèque de la séparation que nous venons de faire *.

Pour obtenir les termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, qui affectent des *sinus* dans l'expression de $\frac{d.\delta nt}{dv}$, nous remplacerons l'équation [11] par celle-ci;

* En ajoutant les deux termes multipliés par m^4 que l'on voit dans ces deux dernières équations avec le terme $-\frac{2187}{128}m^4$, que j'ai donné à la page 485 du premier Volume de ma Théorie de la Lune, l'on obtient le terme $-\frac{3771}{64}m^4$, publié par M. Adams dans le Volume des Transactions Philosophiques pour l'année 1853 (page 405).

[26] .... $+m^2\int R_1 dv =$

$$-m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{357}{32}m+\frac{3}{8}\cdot\frac{\gamma^2}{m}+\frac{75}{8}\cdot\frac{e^2}{m}\right)\sin.c'mv^{(*)}+\frac{15}{8}\varepsilon'\sin.2Ev\\+\frac{3}{16}\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{21}{16}\sin.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\};$$

et nous prendrons pour la valeur de $-2\delta u$ les termes suivans, fournis par les équations [14], [17] et [22]; savoir

[27] .... $-2.\delta u=$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{405}{8}m+\frac{3}{2}\cdot\frac{\gamma^2}{m}+\frac{75}{4}\cdot\frac{e^2}{m}\right)\sin.c'mv-\frac{95}{6}\varepsilon'\sin.2Ev\\-\frac{19}{12}\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{133}{12}\sin.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{d\varepsilon'}{dv}.e\left\{\begin{array}{l}\frac{15}{4}\sin.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\\+\frac{75}{8}\varepsilon'\sin.(2Ev-cv)+\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{em^2}\sin.(Ev+c'mv)\end{array}\right\}.$$

Cela posé, l'équation

$$\frac{d.\delta nt}{dv}=-2\delta u+m^2\int R_1 dv\ ,$$

en prenant les termes affectés des *cosinus* dans les pages 823-834 du second Volume de ma Théorie de la Lune, donnera;

[28] .... $d.\frac{\delta nt}{dv}=$

$$m^2\varepsilon'\left\{\begin{array}{l}\left(3-\frac{735}{16}m^2+\frac{27}{8}e^2-\frac{27}{8}\gamma^2+\frac{27}{8}\varepsilon'^2\right)\cos.c'mv\\+\frac{55}{8}\varepsilon'\cos.2Ev+\frac{11}{8}\cos.(2Ev+c'mv)\\-\frac{77}{8}\cos.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}$$

(*) Voyez la page 81 du second Volume de ma Théorie du mouvement de la Lune.

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1263}{32}m+\frac{9}{8}\cdot\frac{\gamma^2}{m}+\frac{75}{8}\cdot\frac{e^2}{m}\right)\sin.c'mv\\ -\frac{425}{24}\varepsilon'\sin.2Ev-\frac{85}{48}\sin.(2Ev+c'mv)\\ +\frac{595}{48}\sin.(2Ev-c'mv)\end{array}\right\}$$

$$+\frac{d\varepsilon'}{dv}.e\left\{\begin{array}{l}\frac{75}{8}\varepsilon'\sin.(2Ev-cv)+\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{em^2}\sin.(Ev+c'mv)\\ +\frac{15}{4}\sin.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{array}\right\}$$

En intégrant ces termes conformément à la formule [1], et conservant seulement ceux multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, l'on aura

$$\delta nt=$$

$$\left\{\begin{array}{l}3-\left(\frac{735}{16}+\frac{1263}{32}\right)m^2+\left(\frac{27}{8}-\frac{75}{8}\right)e^2\\ -\left(\frac{27}{8}+\frac{9}{8}\right)\gamma^2+\frac{81}{8}\varepsilon'^2\end{array}\right\}\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv$$

$$+\left(\frac{55}{16}+\frac{425}{48}\right)m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.2Ev-\frac{75}{8}e.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(2Ev-cv)$$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\left(\frac{11}{32}+\frac{85}{96}\right)\cos.(2Ev+c'mv)-\left(\frac{77}{32}+\frac{595}{96}\right)\cos.(2Ev-c'mv)\right\}$$

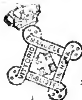
$$-\frac{d\varepsilon'}{dv}.e\left\{\frac{15}{4}\cos.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\cos.(2Ev-c'mv-cv)\right\}$$

$$-\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{m^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(Ev+c'mv)\ ;$$

[29] .... $\delta nt=$

$$\left(3-\frac{2733}{32}m^2-6.e^2-\frac{9}{2}\gamma^2+\frac{81}{8}\varepsilon'^2\right)\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv$$

$$+\ \varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{295}{24}m^2\cos.2Ev-\frac{75}{8}e.\cos.(2Ev-cv)\right\}$$



$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{59}{48}\cos.(2Ev+c'mv)-\frac{413}{48}\cos.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$-\frac{d\varepsilon'}{dv}.e\left\{\frac{15}{4}\cos.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{12}\cos.(2Ev-c'mv-cv)\right\}$$

$$-\frac{10}{3}\cdot\frac{b^2}{m^2}\cdot\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(Ev+c'mv)\ .$$

Ces termes périodiques multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$ sont insensibles. On voit par les équations [14], [17], [19] et [22] qu'il y en a de semblables dans les expressions de δu et δs.

L'inégalité lunaire ayant pour argument $Ev+c'mv$ constitue une espèce de seconde équation du centre, analogue à celle rencontrée par Euler (en 1747) dans ses premières recherches sur les inégalités planétaires. Il est remarquable (abstraction faite de l'excessive petitesse), que le *cosinus* de ce même argument ait, dans l'expression de la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie, un coefficient formé du produit de la quantité séculaire

$$\frac{d\varepsilon'}{dv}\quad\text{par}\quad\frac{b^2}{m^2}=\frac{179}{400}\ .$$

En renversant l'équation qui donne la longitude moyenne de la Lune en fonction de sa longitude vraie, les coefficiens de l'équation [29] affectés des argumens $2Ev$, $2Ev+c'mv$, $2Ev-c'mv$, outre le changement de signe, subissent une modification facile à calculer de la manière suivante. Soit

$$F(v)=3\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv$$

$$+m^2\left\{-\frac{11}{8}\sin.2Ev+\frac{11}{16}\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{77}{16}\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\right\}..$$

En faisant le carré de cette fonction de v, et retenant seulement les argumens $2Ev$, $2Ev+c'mv$, $2Ev-c'mv$, l'on aura;

$$\left[F(v)\right]^2=\quad m^2.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{33}{16}-\frac{231}{16}\right)\sin.2Ev$$

$$-\frac{33}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\sin.(2Ev+c'mv)+\sin.(2Ev-c'mv)\right\}\ .$$

Donc, en différentiant par rapport à v, l'on aura

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d.\{F(v)\}^2}{dv}=$$

$$-\frac{99}{8}m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.2Ev-\frac{33}{8}m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\{\cos.(2Ev+c'mv)+\cos.(2Ev-c'mv)\}.$$

Il suit de là, et de la formule donnée dans la page 502 du 1.er Volume, que l'on a

$$v=nt+\int\zeta ndt-\left(\frac{295}{24}+\frac{99}{8}=\frac{74}{3}\right)m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{ndt}\cos.(2Ent)$$

$$-\left(\frac{59}{48}+\frac{33}{8}=\frac{257}{48}\right)m^2\frac{d\varepsilon'}{ndt}\cos.(2Ent+c'm.nt)$$

$$+\left(\frac{413}{48}-\frac{33}{8}=\frac{215}{48}\right)m^2\frac{d\varepsilon'}{ndt}\cos.(2Ent-c'm.nt)$$

$+$ etc.

§ III.

Calcul des termes constans du 5.ième ordre appartenans au coefficient de ε'^2 dans le développement des deux intégrales

$$-2m^2\int R'dv\ ,\qquad -2m^2\int\delta R'dv\ .$$

En imitant la marche du calcul précédent, il faut d'abord chercher la partie produite par les formules [5] et [7]. Pour cela, on prendra

[30] .... $R'=$

$$-\frac{15}{4}\varepsilon'^2.\sin.2Ev+\frac{15}{2}e.\varepsilon'^2\sin.(2Ev-cv)$$

$$+\varepsilon'\left\{-\frac{3}{4}\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{21}{4}\sin.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$+e\varepsilon'\left\{\frac{3}{2}\sin.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{21}{2}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\right\};$$

[31] .... $\delta v =$

$$\left(-\frac{11}{8}m^2-\frac{59}{12}m^3+\frac{45}{16}me^2+\frac{3}{16}m\gamma^2\right)\sin.2Ev$$

$$-\frac{15}{4}me.\sin.(2Ev-cv)$$

$$+\left(\frac{11}{16}m+\frac{59}{48}m^2-\frac{45}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2\right)m\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$+\left(-\frac{77}{16}m-\frac{413}{16}m^2+\frac{105}{16}e^2+\frac{7}{16}\gamma^2\right)m\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv)$$

$$+me\varepsilon'\left\{\frac{15}{4}\sin.(2Ev+c'mv-cv)-\frac{35}{4}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\right\}.$$

Cela posé l'on aura

$$-2m^2\int R'dv=$$

$$m^3.\varepsilon'^2.\frac{15}{4}\left(-\frac{59}{12}m^2+\frac{45}{16}e^2+\frac{3}{16}\gamma^2\right)+m^3e^2.\varepsilon'^2.\frac{15}{2}\cdot\frac{15}{4}$$

$$+m^3.\varepsilon'^2.\frac{3}{8}\left(\frac{59}{48}m^2-\frac{15}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2\right)-m^3\varepsilon'^2.\frac{21}{8}\left(-\frac{413}{16}m^2+\frac{105}{16}e^2+\frac{7}{16}\gamma^2\right)$$

$$-m^3.e^2\varepsilon'^2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{15}{4}+\frac{21}{4}\cdot\frac{35}{4}\right);$$

d'où l'on tire

[32]... $$-2m^2\int R'dv=\left(\frac{1593}{32}m^2-\frac{885}{32}e^2-\frac{33}{64}\gamma^2\right)m^3\varepsilon'^2.$$

Maintenant, si nous considérons d'abord les termes produits par δnt, on aura, au lieu de l'équation [15];

[33] .... $$-2m^2\int\partial R'dv=$$

$$-2m^3\int dv.\partial nt\left\{\begin{array}{l}-3\cos.2Ev+6e.\cos.(2Ev-cv)\\+\frac{3}{4}\varepsilon'\cos.(2Ev+c'mv)-\frac{63}{4}\varepsilon'\cos.(2Ev-c'mv)\\-\frac{3}{2}e.\varepsilon'\cos.(2Ev+c'mv-cv)\\+\frac{63}{2}e.\varepsilon'\cos.(2Ev-c'mv-cv)\end{array}\right\};$$

donc en réduisant la valeur de ∂nt qui compose le second membre de l'équation [29] à;

$$\partial nt=\frac{295}{24}m^2\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.2Ev-\frac{75}{8}e.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.(2Ev-cv)$$

$$+m^2\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{59}{48}\cos(2Ev+c'mv)-\frac{413}{48}\cos.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$+e\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{15}{4}\cos.(2Ev+c'mv-cv)+\frac{35}{12}\cos.(2Ev-c'mv-cv)\right\};$$

l'on aura

[34] ... $$-2m^2\int\partial R'.dv=\left(\frac{295}{16}-\frac{59}{128}-\frac{8673}{128}=-\frac{1593}{32}\right)m^5.\varepsilon'^2$$

$$+\left(\frac{225}{8}+\frac{45}{32}+\frac{735}{32}=\frac{105}{2}\right)m^3e^2.\varepsilon'^2.$$

La même fonction renferme aussi le terme

$$-2m^2\int\partial R'dv=-2m^3\int dv.\partial nt.(12.\partial u.\cos.2Ev);$$

(Voyez les pages 273 et 331 du 1.er Volume): donc en prenant (Voyez page 16 du second Volume)

$$\partial u=m^2\varepsilon'\left\{-\frac{1}{2}\cos.(2Ev+c'mv)+\frac{7}{2}\cos.(2Ev-c'mv)\right\};$$

$$\partial nt=3\frac{d\varepsilon'}{dv}\cos.c'mv;$$

l'on aura

$$12.\delta u.\cos.2Ev = 18.m^2\varepsilon'.\cos.c'mv\ ;$$

et par conséquent

$$[35] \ \ldots\ldots\ldots \qquad -2m^2\int \delta R'\,dv = -27.m^5\varepsilon'^2.$$

En réunissant ce terme avec ceux de l'équation [34] l'on aura

$$[36] \ \ldots\ldots \quad -2m^2\int \delta R'\,dv = \left(-\frac{2457}{32}m^2 + \frac{105}{2}e^2\right)m^3\varepsilon'^2.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons ajouter à la valeur de δs fournie par l'équation [19] les termes de l'ordre suivant. Pour cela nous avons l'équation (Voyez la page 201 du second Volume)

$$-\frac{d^2.\delta s}{dv^2} - \left(1 + \frac{3}{2}m^2\right)\delta s =$$

$$\sin.(2Ev - gv).\gamma\left\{-\frac{3}{2}m^2 + \frac{15}{4}m^2\varepsilon'^2 + \frac{279}{32}m^3\varepsilon'^2\right\}$$

$$+\sin.(2Ev + c'mv - gv).\varepsilon'\gamma\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{81}{32}m^3\right)$$

$$+\sin.(2Ev - c'mv - gv).\varepsilon'\gamma\left(-\frac{21}{4}m^2 - \frac{27}{32}m^3\right)\ ;$$

laquelle étant intégrée à l'aide de la formule [13], donne;

$$\delta s = \cos.(2Ev - gv).\gamma\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\frac{(1-2m)\left(\frac{15}{4} + \frac{279}{32}m\right)}{4(1+m)^2}$$

$$+\cos.(2Ev + c'mv - gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\frac{(1-m)\left(\frac{3}{4} + \frac{81}{32}m\right)}{2(1+m)^2}$$

$$+\cos.(2Ev - c'mv - gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\frac{(1-3m)\left(-\frac{21}{4} - \frac{27}{32}m\right)}{18(1-m)^2}\ ;$$

c'est-à-dire, en négligeant les puissances de m supérieures à la première;

4

$$(37)\ \ldots\ \delta s = \cos.(2Ev - gv).\gamma\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{15}{16} - \frac{201}{128}m\right)$$

$$+\cos.(2Ev + c'mv - gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{3}{8} + \frac{33}{64}m\right)$$

$$+\cos.(2Ev - c'mv - gv).\gamma.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{7}{24} + \frac{103}{192}m\right).$$

Il suit de là que la fonction

$$-q\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{,}}\right)\delta T = \frac{3}{2}.2\gamma.\sin.gv.\delta s\ ,$$

donne

$$[38]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ -q\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{,}}\right)\delta T =$$

$$\sin.2Ev.\gamma^2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{45}{32} - \frac{603}{256}m\right)$$

$$+\sin.(2Ev + c'mv).\gamma^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{9}{16} + \frac{99}{128}m\right)$$

$$+\sin.(2Ev - c'mv).\gamma^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{7}{16} + \frac{103}{128}m\right).$$

En intégrant les termes de l'équation

$$-2\int R'dv =$$

$$\frac{15}{2}\int \varepsilon'^2 dv.\sin.2Ev - 15.e\int \varepsilon'^2\sin.(2Ev - cv)dv$$

$$+\frac{3}{2}\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev + c'mv) - \frac{21}{2}\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev - c'mv)$$

$$-3e\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev + c'mv - cv) + 21.e\int dv.\varepsilon'\sin.(2Ev - c'mv - cv)$$

$$-\frac{3}{4}b^2\int dv.\varepsilon'\sin.(Ev + c'mv)\ ,$$

à l'aide du troisième terme de la formule [1], l'on aura

$$-2\int R'dv =$$

$$\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\frac{15}{4(1-m)^2}\sin.2Ev-\frac{30.e}{(1-2m)^2}\sin.(2Ev-cv)\right\}$$

$$+\quad\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\frac{3}{2(2-m)^2}\sin.(2Ev+c'mv)-\frac{21}{2(2-3m)^2}\sin.(2Ev-c'mv)\right\}$$

$$+e.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\begin{matrix}-\frac{3}{(1-m)^2}\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\ +\frac{21}{(1-3m)^2}\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{matrix}\right\};$$

$$-\frac{3}{4}b^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ ;$$

d'où l'on tire

$$[39]\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -2m^2\int R'dv=$$

$$m^2\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\frac{15}{4}(1+2m)\sin.2Ev-30.e(1+4m)\sin.(2Ev-cv)\right.$$

$$+m^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\begin{matrix}\frac{3}{8}(1+2m)\sin.(2Ev+c'mv)\\ -\frac{21}{8}\left(1+\frac{3}{2}m\right)\sin.(2Ev-c'mv)\end{matrix}\right\}$$

$$+m^2e.\frac{d\varepsilon'}{dv}.\left\{\begin{matrix}-3(1+2m)\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\ +21(1+3m)\sin.(2Ev-c'mv-cv)\end{matrix}\right\}$$

$$-\frac{3}{4}b^2m^2.\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(Ev+c'mv)\ .$$

En réunissant les termes posés dans le second membre des équations [38] et [39] avec ceux que l'on empruntera aux pages 73 et 406 du second Volume, nous formerons l'équation analogue à l'équation [12] qui nous fournira la valeur de δu nécessaire pour l'objet actuel; savoir

[40] .... $-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)\delta u=$

$$\sin.2Ev.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{15}{4}m^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{15}{2}m^3-\frac{603}{256}m\gamma^2\right)$$

$$+\sin.(2Ev-cv)e.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}(-30m^2)$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(\frac{3}{8}m^2+\frac{9}{16}\gamma^2+\frac{3}{8}m^3+\frac{99}{128}m\gamma^2\right)$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{21}{8}m^2-\frac{7}{16}\gamma^2-\frac{63}{8}m^3+\frac{103}{128}m\gamma^2\right)$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}(-3m^2)$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}(21m^2)$$

$$+\sin.(Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left(-\frac{3}{4}b^2m^2\right)$$

$$+\cos.2Ev.\varepsilon'^2m^2\left(-\frac{15}{2}-\frac{15}{4}m\right)$$

$$+\cos.(2Ev-cv)e.\varepsilon'^2m^2\left(\frac{75}{4}+\frac{285}{32}m\right)$$

$$+\cos.(2Ev+c'mv).\varepsilon'\left(-\frac{3}{2}m^2-\frac{3}{8}m^3+\frac{9}{16}m\gamma^2\right)$$

$$+\cos.(2Ev-c'mv).\varepsilon'\left(\frac{21}{2}m^2+\frac{63}{8}m^3-\frac{21}{16}m\gamma^2\right)$$

$$+\cos.(2Ev+c'mv-cv).m^2e.\varepsilon'\left(\frac{15}{4}-\frac{237}{32}m\right)$$

$$+\cos.(2Ev-c'mv-cv).m^2e.\varepsilon'\left(-\frac{105}{4}-\frac{3393}{32}m\right)$$

$$+\cos.(Ev+c'mv).\varepsilon'm^2b^2\left(\frac{15}{8}-\frac{135}{16}m\right).$$

En intégrant cette équation, conformément à la formule [13] pour les termes affectés de *cosinus*, et par le principe ordinaire pour les termes

affectés de *sinus*, l'on aura le résultat suivant;

$$\delta u =$$

$$\sin. 2Ev.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{15}{4}m^2+\frac{45}{32}\gamma^2+\frac{15}{2}m^3-\frac{603}{256}m\gamma^2\right]\left(1+\frac{8}{3}m\right)\\+\frac{8}{9}m^2(1-m)\left(\frac{15}{2}+\frac{15}{4}m\right)\left(1+\frac{16}{3}m\right)\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-cv)e.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{15}{2}m-\frac{1}{4}(1-2m)\left(\frac{75}{4}+\frac{285}{32}m\right)\left(1+\frac{7}{2}m\right)\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv)\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{8}m^2+\frac{3}{16}\gamma^2+\frac{1}{8}m^3+\frac{33}{128}m\gamma^2\right)\left(1+\frac{4}{3}m\right)\\-\frac{2}{9}(2-m)\left[-\frac{3}{2}m^2-\frac{3}{8}m^3-\frac{9}{16}m\gamma^2\right]\left(1+\frac{8}{3}m\right)\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv)\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\left(-\frac{7}{8}m^2-\frac{7}{48}\gamma^2-\frac{21}{8}m^3+\frac{103}{384}m\gamma^2\right)(1+4m)\\-\frac{2}{9}(2-3m)\left[\frac{21}{2}m^2+\frac{63}{8}m^3-\frac{21}{16}m\gamma^2\right](1+8m)\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}(1-m)\left(\frac{15}{4}-\frac{237}{32}m\right)(1+4m)\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{7}{2}m-\frac{1}{18}(1-3m)\left(-\frac{105}{4}-\frac{3393}{32}m\right)(1+4m)\right\}$$

$$+\sin.(Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{1}{2}b^2+\frac{4}{9}\cdot\frac{b^2}{m^2}\left(-\frac{15}{4}+\frac{135}{8}m\right)\right\};$$

qui se réduit à celui-ci, en négligeant les termes inutiles pour le degré d'approximation dont il est ici question;

[41] .... $\delta u =$

$$\sin. 2Ev.\varepsilon'\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\frac{95}{12}m^2+\frac{15}{32}\gamma^2+\left(\frac{5}{2}+\frac{10}{3}+\frac{290}{9}=\frac{685}{18}\right)m^3\\+\left(-\frac{201}{256}+\frac{5}{4}=\frac{119}{256}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-cv)e.\varepsilon'.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{75}{16}+\left(\frac{15}{2}-\frac{285}{128}-\frac{225}{32}=-\frac{225}{128}\right)m\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}\frac{19}{24}m^2+\frac{3}{16}\gamma^2+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{13}{9}=\frac{137}{72}\right)m^2\\+\left(\frac{33}{128}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{33}{128}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\begin{array}{l}-\frac{133}{24}m^2-\frac{7}{48}\gamma^2\\+\left(-\frac{21}{8}-\frac{7}{2}-\frac{7}{2}-\frac{91}{3}=-\frac{959}{24}\right)m^2\\+\left(\frac{103}{384}-\frac{7}{12}+\frac{7}{12}=\frac{103}{384}\right)m\gamma^2\end{array}\right\}$$

$$+\sin.(2Ev+c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{15}{8}+\left(\frac{237}{64}-\frac{45}{8}=-\frac{123}{64}\right)m\right\}$$

$$+\sin.(2Ev-c'mv-cv)e.\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{\frac{35}{24}-\left(\frac{377}{64}+\frac{35}{24}=\frac{1411}{192}\right)m\right\}$$

$$+\sin.(Ev+c'mv).\frac{d\varepsilon'}{dv}\left\{-\frac{5}{3}\cdot\frac{b^2}{m^2}+\frac{15}{2}\cdot\frac{b^2}{m}\right\}.$$

Maintenant si l'on établit l'équation

[42] .... $$-2m^2\int\partial R'.dv=$$

$$12m^2\int dv.\partial u\left\{\begin{array}{l}\sin.2Ev-(2+2m).e\sin.(2Ev-cv)\\-\frac{1}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv)+\frac{7}{2}\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv)\\+\left(1+\frac{m}{2}\right)e.\varepsilon'\sin.(2Ev+c'mv-cv)\\-\left(7+\frac{21}{2}m\right)e.\varepsilon'\sin.(2Ev-c'mv-cv)\\+\frac{5}{16}b^2\varepsilon'.\sin.(Ev+c'mv)\end{array}\right\},$$

formée d'après les développements donnés dans les pages 273, 336 et 343 du 1.er Volume on trouvera, que, avec la valeur précédente de δu, l'on a

$$-2m^2\int\delta R'dv=$$

$$6m^2\int dv\,.\,\epsilon'.\frac{d\epsilon'}{dv}\left\{\frac{95}{12}m^2+\frac{15}{32}\gamma^2+\frac{685}{18}m^3+\frac{119}{256}m\gamma^2\right\}$$

$$+6m^2\int dv.e^2\epsilon'.\frac{d\epsilon'}{dv}\left\{\frac{75}{8}+\left(\frac{225}{64}+\frac{75}{8}=\frac{825}{64}\right)m\right\}$$

$$+6m^2\int dv\,.\,\epsilon'.\frac{d\epsilon'}{dv}\left\{-\frac{19}{48}m^2-\frac{3}{32}\gamma^2-\frac{137}{144}m^3-\frac{33}{256}m\gamma^2\right\}$$

$$+6m^2\int dv\,.\,\epsilon'.\frac{d\epsilon'}{dv}\left\{-\frac{931}{48}m^2-\frac{49}{96}\gamma^2-\frac{6713}{48}m^3+\frac{721}{768}m\gamma^2\right\}$$

$$+6m^2\int dv.e^2\epsilon'.\frac{d\epsilon'}{dv}\left\{-\frac{15}{8}-\left(\frac{123}{64}+\frac{15}{16}=\frac{183}{64}\right)m\right\}$$

$$+6m^2\int dv.e^2\epsilon'.\frac{d\epsilon'}{dv}\left\{-\frac{245}{24}-\left(\frac{9877}{192}+\frac{245}{16}=\frac{12817}{192}\right)m\right\}$$

$$+6m^2\int dv\,.\,\epsilon'.\frac{d\epsilon'}{dv}\left\{-\frac{25}{48}\cdot\frac{b^4}{m^2}+\frac{75}{32}\cdot\frac{b^4}{m}\right\}\,.$$

Donc, en conservant seulement les termes du 7.ième ordre, l'on aura

[43] .... $$-2m^2\int\delta R'dv=$$

$$\left(\frac{685}{6}-\frac{137}{48}-\frac{6713}{16}=-\frac{1233}{4}\right)m^5.\epsilon'^2$$

$$+\left(\frac{2475}{64}-\frac{549}{64}-\frac{12817}{64}=-\frac{10841}{64}\right)m^3e^2.\epsilon'^2$$

$$+\left(\frac{357}{256}-\frac{99}{256}+\frac{721}{256}=\frac{979}{256}\right)m^3\gamma^2.\epsilon'^2$$

$$+\frac{225}{32}.mb^4.\epsilon'^2\,.$$

En sommant les termes donnés par les équations [36] et [43], nous aurons

[44] .... $-2m^2\int \delta R' dv =$

$$\left(-\frac{2457}{32}-\frac{1233}{4}=-\frac{12321}{32}\right)m^5.\varepsilon'^2$$

$$+\left(\frac{105}{2}-\frac{10891}{64}=-\frac{7531}{64}\right)m^3e^2.\varepsilon'^2+\frac{979}{256}m^3\gamma^2.\varepsilon'^2+\frac{225}{32}mb^4.\varepsilon'^2.$$

Les équations [32] et [44] ajoutent au second membre des équations [24] et [25] les termes suivans; savoir:

[45] .... $\int' \zeta dv = -\frac{3}{2}.2m^2\int R' dv =$

$$\left(\frac{4779}{64}m^5-\frac{2655}{64}m^3e^2-\frac{99}{128}m^3\gamma^2\right)\int dv(\varepsilon'^2-E'^2)\ ;$$

[46] .... $\int'' \zeta dv = -\frac{3}{2}.2m^2\int \delta R' dv =$

$$\left(-\frac{36963}{64}m^5-\frac{22593}{128}m^3e^2+\frac{2937}{512}m^3\gamma^2+\frac{675}{64}mb^4\right)\int dv(\varepsilon'^2-E'^2)\ .$$

§ IV.

Calcul des termes constans du 6.ième et 7.ième ordre appartenans au coefficient de ε'^2 dans le développement de l'intégrale

$$-2m^2\int R' dv\ .$$

Et expression des termes additionnels au coefficient primitif de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

En prenant

[47] ..... $R' = \left(-\frac{15}{4}-\frac{15}{2}e^2+\frac{39}{32}\varepsilon'^2\right)\varepsilon'^2 \sin. 2Ev$

$$+\frac{15}{2}.e\varepsilon'^2 \sin.(2Ev-cv)$$

$$+\left(-\frac{3}{4}-\frac{3}{2}e^2+\frac{3}{32}\varepsilon'^2\right).\,\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$+\left(\frac{21}{4}+\frac{21}{2}e^2-\frac{369}{32}\varepsilon'^2\right).\,\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv)$$

$$+\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}m+\frac{9}{8}e^2-\frac{3}{8}\gamma^2\right).e\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$

$$+\left(-\frac{21}{2}-\frac{63}{4}m-\frac{63}{8}e^2+\frac{21}{8}\gamma^2\right).e\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-cv)$$

$$-\frac{15}{8}.e^2\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-2cv)$$

$$+\frac{105}{8}.e^2\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-2cv)$$

$$+\frac{3}{8}.b^2\varepsilon'.\sin.(Ev+c'mv)$$

$$+\frac{9}{8}.b^2\varepsilon'.\sin.(Ev-c'mv)\ ;$$

[48] .... $\partial v=$

$$\left\{\begin{array}{l}-\frac{11}{8}m^2-\frac{59}{12}m^3+\frac{45}{16}me^2+\frac{3}{16}m\gamma^2-\frac{893}{72}m^4+\frac{55}{16}m^2\varepsilon'^2\\+\frac{603}{64}m^2e^2+\frac{47}{64}m^2\gamma^2-\frac{2855}{108}m^5+\frac{33769}{1024}m^3e^2\\+\frac{5149}{3072}m^3\gamma^2-\frac{39}{16}me^2\gamma^2-\frac{9}{64}m\gamma^2\end{array}\right\}\sin.2Ev$$

$$+\left\{-\frac{15}{4}m-\frac{285}{16}m^2-\frac{17347}{256}m^3+\frac{15}{8}me^2+\frac{21}{8}m\gamma^2\right\}e\sin.(2Ev-cv)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{11}{16}m+\frac{59}{48}m^2-\frac{45}{16}e^2-\frac{3}{16}\gamma^2+\frac{29}{576}m^3-\frac{99}{64}me^2\\-\frac{37}{64}m\gamma^2-\frac{1129}{432}m^4+\frac{65711}{1024}m^2e^2-\frac{4237}{3072}m^2\gamma^2\\+\frac{39}{16}e^2\gamma^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{9}{64}\gamma^4-\frac{225}{128}b^4\end{array}\right\}m\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv)$$

$$+\left\{\begin{matrix} -\frac{77}{16}m-\frac{413}{16}m^2+\frac{105}{16}e^2+\frac{7}{16}\gamma^2-\frac{7003}{60}m^3 \\ +\frac{1983}{64}me^2+\frac{173}{64}m\gamma^2-\frac{6077}{16}m^4+\frac{170573}{1024}m^2e^2 \\ +\frac{11443}{1024}m^2\gamma^2-\frac{91}{16}e^2\gamma^2-\frac{105}{64}e^4-\frac{21}{64}\gamma^4 \end{matrix}\right\} m\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv)$$

$$+\left\{\frac{15}{4}+\frac{15}{32}m-\frac{18913}{128}m^2-\frac{15}{8}e^2-\frac{21}{8}\gamma^2\right\} me\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-cv)$$

$$+\left\{-\frac{35}{4}-\frac{1775}{32}m-\frac{32691}{128}m^2+\frac{35}{8}e^2+\frac{49}{8}\gamma^2\right\} me\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-cv)$$

$$+\frac{45}{16}me^2\varepsilon'.\sin.(2Ev+c'mv-2cv)$$

$$-\frac{105}{16}me^2\varepsilon'.\sin.(2Ev-c'mv-2cv)$$

$$+\left\{-\frac{5}{2}+\frac{45}{4}m\right\} b^2\varepsilon'\sin.(Ev+c'mv)$$

$$-\frac{15}{8}mb^2\varepsilon'\sin.(Ev-c'mv)\ .$$

En appliquant à ces deux fonctions les formules [5], [7], (a), suivant les valeurs des exposans désignés par g et λ; et tenant compte des termes du 8.ième ordre, de la forme $Am^4\varepsilon'^4$, l'on obtiendra les termes suivans:

$$-2m^2\int R'dv=$$

$$\left\{\begin{matrix} m^2.\frac{15}{4}\varepsilon'^2\left\{\begin{matrix} -\frac{893}{72}m^4+\frac{603}{64}m^2e^2+\frac{47}{64}m^2\gamma^2+\frac{1}{2}.\frac{55}{16}m^2\varepsilon'^2 \\ -\frac{2855}{108}m^5+\frac{33769}{1024}m^3e^2+\frac{5149}{3072}m^3\gamma^2 \\ -\frac{39}{16}me^2\gamma^2-\frac{9}{64}m\gamma^4 \end{matrix}\right\} \\ +m^2.\frac{15}{2}e^2\varepsilon'^2\left\{-\frac{11}{8}m^2-\frac{59}{12}m^3+\frac{45}{16}me^2+\frac{3}{16}m\gamma^2\right\} \\ -m^2.\frac{39}{32}\varepsilon'^4\left(-\frac{11}{8}m^2\right) \end{matrix}\right.$$

$$+\left\{-m^2.\frac{15}{2}e^2\varepsilon'^2\left(-\frac{285}{16}m^2-\frac{17347}{256}m^3+\frac{15}{8}me^2+\frac{21}{8}m\gamma^2\right)\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
+m^3.\dfrac{3}{8}\varepsilon'^2\left\{\begin{array}{l}\dfrac{29}{576}m^3-\dfrac{99}{64}me^2-\dfrac{37}{64}m\gamma^2-\dfrac{1129}{432}m^4+\dfrac{65711}{1024}m^2e^2\\ -\dfrac{4237}{3072}m^2\gamma^2+\dfrac{39}{16}e^2\gamma^2+\dfrac{9}{64}\gamma^4+\dfrac{45}{64}e^4-\dfrac{225}{128}b^4\end{array}\right\}\\
+m^3.\dfrac{3}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{\dfrac{11}{16}m+\dfrac{59}{48}m^2-\dfrac{45}{16}e^2-\dfrac{3}{16}\gamma^2\right\}\\
-\dfrac{3}{32}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{11}{16}m^4\varepsilon'^4
\end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
-m^3.\dfrac{21}{8}\varepsilon'^2\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{7003}{64}m^3+\dfrac{1983}{64}me^2+\dfrac{173}{64}m\gamma^2-\dfrac{6077}{16}m^4\\ +\dfrac{170573}{1024}m^2e^2+\dfrac{11443}{1024}m^2\gamma^2-\dfrac{91}{16}e^2\gamma^2-\dfrac{105}{64}e^4-\dfrac{21}{64}\gamma^4\end{array}\right\}\\
-m^3.\dfrac{21}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{-\dfrac{77}{16}m-\dfrac{413}{16}m^2+\dfrac{105}{16}e^2+\dfrac{7}{16}\gamma^2\right\}\\
-\dfrac{369}{32}.\dfrac{3}{4}.\dfrac{77}{16}m^4\varepsilon'^4
\end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
-m^3.\dfrac{3}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{\dfrac{15}{32}m-\dfrac{18913}{128}m^2-\dfrac{15}{8}e^2-\dfrac{21}{8}\gamma^2\right\}\\
-m^4.\dfrac{3}{8}e^2\varepsilon'^2\left(\dfrac{15}{4}+\dfrac{15}{32}m\right)\\
-m^3.\dfrac{15}{8}e^2\varepsilon'^2\left(\dfrac{9}{8}e^2-\dfrac{3}{8}\gamma^2\right)
\end{array}\right.$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
+m^3.\dfrac{21}{4}e^2\varepsilon'^2\left\{-\dfrac{1775}{32}m-\dfrac{32691}{128}m^2+\dfrac{35}{8}e^2+\dfrac{49}{8}\gamma^2\right\}\\
+m^4.\dfrac{63}{8}e^2\varepsilon'^2\left\{-\dfrac{35}{4}-\dfrac{1775}{32}m\right\}\\
+m^3.\dfrac{35}{8}e^2\varepsilon'^2\left(-\dfrac{63}{8}e^2+\dfrac{21}{8}\gamma^2\right)
\end{array}\right.$$

$$+\left\{+\frac{15}{16}\cdot\frac{45}{16}m^3e^4\varepsilon'^2+\frac{105}{16}\cdot\frac{105}{16}m^3e^4\varepsilon'^2\right\}$$

$$+\left\{-m^2.\frac{3}{16}b^4\varepsilon'^2\left(-\frac{5}{2}+\frac{45}{4}m\right)\right\}$$

$$+m^3.\frac{9}{16}.b^4\varepsilon'^2\left(\frac{15}{8}\right).$$

Donc en réunissant les termes affectés du même coefficient littéral, l'on aura

$$(49)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\qquad -2m^2\int R'dv=$$

$$\left(\frac{825}{128}+\frac{429}{256}-\frac{99}{2048}-\frac{85239}{2048}=-\frac{34353}{1024}\right)m^4\varepsilon'^4$$

$$+\left(-\frac{4465}{96}+\frac{29}{1536}+\frac{147063}{512}=+\frac{184889}{768}\right)m^6.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{matrix}\frac{9045}{256}-\frac{165}{16}+\frac{4275}{32}-\frac{297}{512}+\frac{33}{64}-\frac{41643}{512}+\frac{1617}{64}\\ -\frac{45}{128}-\frac{45}{32}-\frac{37275}{128}-\frac{2205}{32}=-\frac{66405}{256}\end{matrix}\right\}m^4e^2.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\frac{705}{256}-\frac{111}{512}-\frac{3633}{512}=-\frac{1167}{256}\right\}m^4\gamma^2.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{-\frac{14275}{144}-\frac{1129}{1152}+\frac{127617}{128}=+\frac{43051}{48}\right\}m^5.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{matrix}\frac{506535}{4096}-\frac{295}{8}+\frac{260205}{512}+\frac{197133}{8192}+\frac{59}{64}\\ +\frac{3582033}{8192}+\frac{8673}{64}+\frac{56739}{512}\\ -\frac{45}{256}-\frac{686511}{512}-\frac{111825}{256}=-\frac{971265}{2048}\end{matrix}\right\}m^5e^2.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\frac{25745}{4096}-\frac{4237}{8192}-\frac{240303}{8192}=-\frac{96525}{4096}\right\}m^5\gamma^2.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{matrix}-\frac{585}{64}+\frac{45}{32}-\frac{315}{16}+\frac{117}{128}+\frac{1911}{128}-\frac{147}{64}+\frac{63}{32}\\+\frac{45}{64}+\frac{1029}{32}+\frac{735}{64}-\frac{9}{64}=+\frac{663}{32}\end{matrix}\right\}m^3e^2\gamma^2.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{-\frac{135}{256}+\frac{27}{512}+\frac{441}{512}=+\frac{99}{256}\right\}m^3\gamma^4.\varepsilon'^2$$

$$+\left\{\begin{matrix}\frac{675}{32}-\frac{225}{16}+\frac{135}{512}-\frac{135}{64}+\frac{2205}{512}-\frac{2205}{64}+\frac{45}{32}\\-\frac{135}{64}+\frac{735}{32}-\frac{2205}{64}+\frac{675}{256}+\frac{11025}{256}=+\frac{10455}{128}\end{matrix}\right\}m^3e^4.\varepsilon'^2$$

$$+\frac{15}{32}m^2b^4.\varepsilon'^2+\left\{-\frac{225}{128}-\frac{135}{64}+\frac{135}{128}=-\frac{45}{16}\right\}m^3b^4.\varepsilon'^2\ .$$

Cela posé si l'on réunit ces termes avec ceux déterminés par nos équations [10] et [44], on aura, pour la totalité des termes fournis par le développement de l'intégrale $-2m^2\int R'dv$, le résultat suivant;

[50] .... $-2m^2\int R'dv=$

$$\left\{\begin{matrix}\frac{495}{64}m^4+\frac{1593}{32}m^5-\frac{885}{32}m^3e^2-\frac{33}{64}m^3\gamma^2\\+\frac{184889}{768}m^6-\frac{66405}{256}m^4e^2-\frac{1167}{256}m^4\gamma^2\\+\frac{43051}{48}m^7-\frac{971265}{2048}m^5e^2-\frac{96525}{4096}m^5\gamma^2\\+\frac{663}{32}m^3e^2\gamma^2+\frac{99}{256}m^3\gamma^4+\frac{10455}{128}m^3e^4\\+\frac{15}{32}m^2b^4-\frac{45}{16}m^3b^4\end{matrix}\right\}\varepsilon'^2$$

$$-\frac{34353}{1024}m^4\varepsilon'^4\ .$$

Donc, en établissant les équations

$$\Pi = m^2 \int R' dv \;; \qquad \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}} = 1 - 2m^2 \int R' dv \;,$$

il suffit ici de faire

$$(1 + \Pi) \left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}_{\prime}} \right)^2 = - \frac{3}{2} . 2m^2 \int R' dv \;;$$

et de multiplier par $1 - m^2$ les termes du second membre de cette équation, pour avoir ceux qui doivent être ajoutés aux coefficiens des deux intégrales

$$\int dv (\varepsilon'^2 - E'^2) \;; \qquad \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) \;,$$

dans l'expression de l'intégrale $\int \zeta dv$ donnée à la page 485 du premier Volume de ma Théorie de la Lune. C'est ce qui devient clair en consultant la page 852 du second Volume et les pages 321 et 802 du troisième. En désignant par $\int' \zeta dv$ la somme de ces termes additionnels, le résultat de ce calcul sera renfermé dans cette équation, savoir

[51] .... $\int' \zeta dv =$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1485}{128} m^4 + \frac{4779}{64} m^5 - \frac{2655}{64} m^3 e^2 - \frac{99}{128} m^3 \gamma^2 \\
&+ \left(\frac{184889}{512} - \frac{1485}{128} = \frac{178949}{512} \right) m^6 - \frac{199215}{512} m^4 e^2 \\
&- \frac{3501}{512} m^4 \gamma^2 + \left(\frac{43051}{32} - \frac{4779}{64} = \frac{81323}{64} \right) m^7 \\
&+ \left(- \frac{2913795}{4096} + \frac{2655}{64} = - \frac{2743875}{4096} \right) m^5 e^2 \\
&+ \frac{45}{64} m^2 b^4
\end{aligned}\right\} \int dv (\varepsilon'^2 - E'^2) \quad .$$

$$- \frac{103059}{2048} m^4 \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) \;.$$

Nous avons supprimés les termes du 7.ième ordre multipliés par $m^5\gamma^2$, $m^3e^2\gamma^2$, $m^3\gamma^4$, m^3e^4, m^3b^4, parceque ces termes n'ont pas été considérés dans nos développements primitifs.

Je dois faire observer que dans le second membre de l'équation différentielle en δs, il y a la fonction $2P\mu^2.\gamma\sin.gv\int R_1 dv$, qui, en y faisant $P=\frac{3}{2}m^2$, $\mu^2=m^2$, et prenant pour $-2m^2\int R_1 dv$ la seule partie séculaire $\frac{495}{64}m^4\varepsilon'^2$ fournie par notre équation [10], y introduit le terme du *neuvième* ordre,

$$[52] \ldots\ldots \quad 2P\mu^2.\gamma\sin.gv\int R_1 dv = -\frac{1485}{128}m^6\varepsilon'^2\gamma\sin.gv \ .$$

Mais ce terme donnerait des quantités du *sixième* ordre, et notre approximation a été bornée aux quantités du *cinquième* ordre dans le coefficient de l'équation séculaire du mouvement du nœud de la Lune (Voyez la page 195 du 3.ème Volume de ma Théorie de la Lune).

Il y a un terme semblable dans l'expression du mouvement du périgée, dû à la fonction

$$\frac{2\mu^2.qQ'}{1+\gamma^2}.e\cos.cv.\int R_1 dv \ ,$$

qui fait partie du second membre de l'équation (II)'' donnée à la page 277 de mon 1.er Volume. Car, en posant $\frac{q}{1+\gamma^2}=1$ et $Q'=-\frac{3}{2}m^2$, il est clair que, au lieu de l'équation [52], l'on aura

$$[53] \ldots\ldots \quad \frac{2\mu^2.qQ'}{1+\gamma^2}.e\cos.cv.\int R_1 dv = \frac{1485}{128}m^6\varepsilon'^2.e\cos.cv \ ;$$

c'est-à-dire un terme qui donnerait des quantités du *sixième* ordre, tandis que nous avons borné l'approximation à celles du *cinquième* dans le calcul du coefficient de l'équation séculaire relativement au mouvement du périgée (Voyez la page 292 du 3.ème Volume).

Avant de terminer ce § j'ajouterai ici l'équation séculaire de l'anomalie, et celle de l'argument de latitude de la Lune. La première est composée par la somme algébrique $\int \zeta dv + \int \varpi dv$, et la seconde par

la somme $\int \zeta dv + \int \theta dv$. Ainsi, en appliquant l'équation désignee par (k) dans le préambule de ce Mémoire, aux valeurs des intégrales $\int \varpi dv$, $\int \theta dv$ posées dans les pages 485 et 486 du premier Volume de mon ouvrage, l'on aura

$$(k'') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int \zeta dv + \int \varpi dv =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{21}{8} m^2 + \frac{825}{32} m^3 + \frac{60351}{256} m^4 + \frac{1816233}{1024} m^5 \\ + e^2 \left\{ \frac{1389}{128} m^2 + \frac{65295}{512} m^3 \right\} \\ + \gamma^2 \left\{ \frac{237}{128} m^2 - \frac{10401}{512} m^3 \right\} + b^4 \left(\frac{75}{32} - \frac{677}{32} m \right) \end{array} \right\} \int dv (\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+ \left\{ \frac{105}{32} m^3 + \frac{225}{4} m^3 \right\} \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) ;$$

$$(k''') \quad \ldots\ldots\ldots \quad \int \zeta dv + \int \theta dv =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{8} m^2 + \frac{33}{32} m^3 + \frac{1281}{256} m^4 + \frac{79785}{1024} m^5 \\ + e^2 \left\{ \frac{1173}{128} m^2 + \frac{74007}{512} m^3 \right\} \\ + \gamma^2 \left\{ \frac{597}{128} m^2 - \frac{105}{512} m^3 \right\} + b^4 \left(\frac{75}{32} - \frac{675}{32} m \right) \end{array} \right\} \int dv (\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+ \left\{ \frac{15}{32} m^2 + \frac{9}{4} m^3 \right\} \int dv (\varepsilon'^4 - E'^4) .$$

Les premiers termes $\frac{21}{8} m^2$ et $\frac{3}{8} m^2$ de ces équations sont ceux trouvés par LAPLACE en 1787 (*). Plus tard (en 1802) il a reconnu

(*) Voyez la page 257 du Volume de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1786

que les quantités du 3.ième et du 4.ième ordre augmentaient considérablement l'équation séculaire du périgée, sans reconnaître, en même temps, que les quantités du même ordre modifient aussi, sensiblement, l'équation séculaire du moyen mouvement (Lisez la page 227 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste).

§ V.

La fonction séculaire [désignée par $\int'' \zeta dv$ dans les équations [25] et [46]], née des termes périodiques de δu et δnt multipliés par $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, est étrangère à l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

Pour démontrer cette proposition, il est indispensable de remonter à la source de la fonction $\int'' \zeta dv$, afin de faire concevoir, que les expressions, soit de δu, soit de δnt, obtenues jusqu'aux quantités d'un ordre déterminé, ne doivent pas être substituées dans les intégrales de la forme

$$A\int dv\,.\,\delta u\,.\,\varepsilon'^{g}\sin.(kv+\beta-g\tau')\ ;$$

$$A'\int dv\,.\,\delta nt\,.\,\varepsilon'^{g}\cos.(kv+\beta-g\tau')\ ,$$

qui entrent dans les équations différentielles mêmes qui ont été intégrées. Pour avoir égard dans l'intégration, non seulement à la variabilité séculaire, inhérente aux élémens ε' et τ' de l'orbite de la Terre, mais aussi aux termes périodiques multipliés par les coefficiens différentiels de ces mêmes élémens, on doit faire $\delta u = 0$, $\delta nt = 0$ dans les fonctions qu'on sait ne pouvoir donner que des quantités de l'ordre subséquent.

Transportons nous au commencement de ce Mémoire, et examinons de plus près la valeur de x déterminée par l'équation

(A) .... $$x = B\int dv\,.\,\varepsilon'^{g}\sin.(kv+\beta-g\tau')\ ,$$

lorsqu'on y fait,

$$\varepsilon'^{g} \cos. g\tau' = M \cos.(pv+q) + M' \cos.(p'v+q') + \text{etc.} \;;$$

$$\varepsilon'^{g} \sin. g\tau' = M \sin.(pv+q) + M' \sin.(p'v+q') + \text{etc.} \;,$$

après avoir calculé séparément, à l'aide de nos trois formules [5], [7], et (*a*) la partie séculaire née des termes multipliés par δv, que l'on voit dans l'équation [2].

Sous une forme concise, nous écrirons

$$(\text{A}') \;\ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'^{g} \cos. g\tau' = \Sigma \cdot M \cos.(pv+q) \;, \\ \varepsilon'^{g} \sin. g\tau' = \Sigma \cdot M \sin.(pv+q) \;; \end{array} \right.$$

ce qui transforme la valeur précédente en x en celle-ci;

$$x = B \int dv \cdot \Sigma \cdot M \sin.(kv+\beta-pv-q) \;,$$

et donne, en exécutant l'intégration indiquée;

$$(\text{A}'') \;\ldots\ldots \quad x = -B \cdot \Sigma \cdot \frac{M}{k-p} \cos.(kv+\beta-pv-q) \;.$$

Cette formule exige, en général, la connaissance des coefficiens M, M', M'', etc.; p, p', p'', etc. Mais, dans le cas particulier, où *tous* les coefficiens p, p', p'', etc. sont très-petits en comparaison du coefficient désigné par k, on peut remplacer

$$\frac{M}{k-p} \quad \text{par} \quad \frac{M}{k}\left(1+\frac{p}{k}+\frac{p^2}{k^2}+\text{etc.}\right) \;;$$

et alors la valeur précédente de x peut, d'abord, être écrite ainsi;

$$-\frac{B}{k}\left\{\cos.(kv+\beta)\cdot\Sigma\cdot M\cos.(pv+q)+\sin.(kv+\beta)\cdot\Sigma\cdot M\sin.(pv+q)\right\}$$

$$-\frac{B}{k^2}\left\{\cos.(kv+\beta)\cdot\Sigma\cdot pM\cos.(pv+q)+\sin.(kv+\beta)\cdot\Sigma\cdot pM\sin.(pv+q)\right\}$$

$$-\frac{B}{k^3}\left\{\cos.(kv+\beta)\cdot\Sigma\cdot p^2M\cos.(pv+q)+\sin.(kv+\beta)\cdot\Sigma\cdot p^2M\sin.(pv+q)\right\}$$

$$-\text{etc.}$$

Or, il est clair, que la première ligne du second membre de cette équation est équivalente au terme

$$-\frac{B}{k}.\varepsilon'^{g}\cos.(kv+\beta-g\tau') \; :$$

donc, en négligeant les termes multipliés par p, p^2, etc. qui sont, en réalité, très-petits comparativement au premier terme, on peut réduire la valeur de x à

$$(A''') \; \ldots\ldots \quad x=-\frac{B}{k}.\varepsilon'^{g}\cos.(kv+\beta-g\tau') \; ;$$

c'est-à-dire à la valeur que l'on obtient immédiatement, en intégrant le second membre de l'équation (A), comme si les élémens ε' et τ' étaient des quantités tout-à-fait constantes. De sorte que, pour avoir égard à leur variabilité séculaire, il suffit de calculer les termes périodiques avec les valeurs variables de ces mêmes élémens. C'est sur ce principe, qui facilite singulièrement les intégrations, qu'est fondé le développement de tous les coefficiens qui affectent les termes périodiques appartenans aux trois perturbations δs, δu, δnt des coordonnées elliptiques de la Lune. Mais, si on demande en outre, que les intégrations soient conduites de manière à pouvoir tenir compte des coefficiens différentiels des élémens ε' et τ', il suffira d'observer, que la série précédente revient à dire que l'on a ;

$$(A^{\text{IV}}) \; \ldots\ldots \quad x=-\frac{B}{k}\,\varepsilon'^{g}\cos.(kv+\beta-g\tau')$$

$$-\frac{B}{k^2}\left\{\cos.(kv+\beta).\frac{d.[\varepsilon'^{g}\sin.g\tau']}{dv}-\sin.(kv+\beta).\frac{d.[\varepsilon'^{g}\cos.g\tau']}{dv}\right\}$$

$$+\frac{B}{k^3}\left\{\cos.(kv+\beta).\frac{d^2.[\varepsilon'^{g}\cos.g\tau']}{dv^2}+\sin.(kv+\beta).\frac{d^2.[\varepsilon'^{g}\sin.g\tau']}{dv^2}\right\}$$

$$+\frac{B}{k^4}\left\{\cos.(kv+\beta).\frac{d^3.[\varepsilon'^{g}\sin.g\tau']}{dv^3}-\sin.(kv+\beta).\frac{d^3.[\varepsilon'^{g}\cos.g\tau']}{dv^3}\right\}$$

$$+\text{etc.} \; ;$$

ce qui offre le moyen d'exprimer indéfiniment la valeur de x par les coefficiens différentiels $\frac{d\varepsilon'}{dv}$, $\frac{d^2\varepsilon'}{dv^2}$, etc. ; $\frac{d\tau'}{dv}$, $\frac{d^2\tau'}{dv^2}$, etc.

L'équation différentielle du second ordre qui détermine δu, peut être intégrée d'une manière analogue, après l'avoir préparée de manière que les fonctions inconnues, de la forme

$$\int dv.\delta u.F(v)\ , \qquad \int dv\cdot\delta nt.f(v)\ ,$$

ne puissent produire aucun terme de l'ordre auquel on veut que l'approximation soit poussée. Alors, la question est réduite à intégrer une équation de la forme ;

(D) .... $$-\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-i^2.\delta u=$$

$$H.\varepsilon'^g\cos.(kv+\beta-g\tau')-B\int dv.\varepsilon'^g\sin.(kv+\beta-g\tau')\ ,$$

pour chaque terme périodique que l'on veut considérer.

Ici, $i^2=1-\frac{3}{2}m^2$, et le terme que je laisse affecté du signe intégral, est celui né du développement de la fonction $-2m^2\int R_1 dv$.

En vertu des deux équations (A'), cette équation est équivalente à celle-ci ;

(D') .... $$\frac{d^2.\delta u}{dv^2}-i^2\delta u=$$

$$H\cdot\overline{\Sigma}\cdot M\cos.(kv+\beta-pv-q)+B\cdot\overline{\Sigma}\cdot\frac{M}{k-p}\cos.(kv+\beta-pv-q)\ .$$

Donc, en intégrant d'après le principe ordinaire, ce qui est permis, puisque, ici, les coefficiens sont des quantités absolument constantes, si l'on fait, pour plus de simplicité;

$$N=\frac{M}{(k-p)^2-i^2}\ ; \qquad G=\frac{N}{k-p}\ ,$$

l'on aura

(D'') .... $$\delta u=$$

$$H\cdot\overline{\Sigma}\cdot N\cos.(kv+\beta-pv-q)+B\cdot\overline{\Sigma}\cdot G\cos.(kv+\beta-pv-q)\ .$$

Maintenant, si l'on néglige le carré de p, l'on a

$$N=\frac{M}{k^2-i^2}+\frac{2k.pM}{(k^2-i^2)^2}\ ;$$

$$G=\frac{M}{k(k^2-i^2)}+\frac{pM}{(k^2-i^2)}\cdot\left\{\frac{1}{k^2}+\frac{2}{k^2-i^2}\right\}\ ;$$

donc, en faisant

$$A=\frac{H+\frac{B}{k}}{k^2-i^2}\ ;\qquad C=\frac{B}{k}\ ,$$

l'équation (D″) donne

$$(D''')\ldots\ldots\ \delta u=\ A\cdot\Sigma\cdot M\cos.(kv+\beta-pv-q)$$
$$+\frac{2k}{(k^2-i^2)}\left\{A+\frac{C}{2k^2}\right\}\cdot\Sigma\cdot pM\cos.(kv+\beta-pv-q)\ .$$

Cela posé, si l'on observe que,

$$\Sigma\cdot\ M\cos.(kv+\beta-pv-q)=\ \cos.(kv+\beta).\epsilon'^g\cos.g\tau'$$
$$+\sin.(kv+\beta).\epsilon'^g\sin.g\tau'\ ;$$

$$\Sigma\cdot pM\cos.(kv+\beta-pv-q)=\ \cos.(kv+\beta).\frac{d.[\epsilon'^g\sin.g\tau']}{dv}$$
$$-\sin.(kv+\beta).\frac{d.[\epsilon'^g\cos.g\tau']}{dv}\ ,$$

l'on en conclura, que l'expression précédente de δu peut être mise sous cette forme;

$$(D^{IV})\ \ldots\ldots\ \delta u=\ A.\epsilon'^g\cos.(kv+\beta-g\tau')$$
$$-\left(A+\frac{C}{2k^2}\right)\cdot\frac{2kg\epsilon'^{g-1}}{(k^2-i^2)}\cdot\frac{d\epsilon'}{dv}\sin.(kv+\beta-g\tau')$$
$$+\left(A+\frac{C}{2k^2}\right)\cdot\frac{2kg.\epsilon'^g}{(k^2-i^2)}\cdot\frac{d\tau'}{dv}\cos.(kv+\beta-g\tau')\ .$$

Les coefficiens A et C étant connus *séparément* par la méthode même qui a été suivie dans la formation, et dans l'intégration de l'équation différentielle en δu, on pourrait obtenir, *a priori*, à l'aide de la formule (D^{IV}) les deux termes de la forme

$$\delta u = P.\cos.(kv+\beta-g\tau')+Q.\sin.(kv+\beta-g\tau')\ ,$$

définis par LAPLACE à la page 214 du 3.ième Volume de la Mécanique Céleste. Mais le second terme $Q.\sin.(kv+\beta-g\tau')$ ne constitue pas une *approximation ultérieure;* il est associé au premier dès que l'on veut avoir égard à la variation séculaire de $\frac{d\epsilon'}{dv}$ et $\frac{d\tau'}{dv}$. Cette condition modifie le mode d'intégrer l'équation (D), mais elle doit être satisfaite sans l'addition de l'intégrale

$$+12m^2H'\int dv.\delta u.\Sigma.M\sin.(kv+\beta-pv-q)$$

dans le second membre de l'équation (D'), puisque cette intégrale a déjà été prise en considération en formant les deux parties distinctes qui composent le second membre de l'équation (D'). Il suit de là que l'on doit faire $\delta u=0$ dans cette intégrale, dès qu'il n'est point question de passer des quantités d'un ordre à celles de l'ordre suivant. On doit en conséquence *supprimer* les termes séculaires nés de l'intégrale précédente par la substitution du second terme de la formule (D^{IV}). Tels sont les motifs qui me font regarder comme inadmissibles les termes séculaires donnés par l'intégrale que j'ai désignée par $\int''\zeta dv$ en formant les équations [25] et [46]. D'ailleurs en poursuivant leur calcul on verrait qu'ils constituent une suite divergente.

Les termes séculaires, qui constituent l'intégrale $\int'\zeta dv$, déterminés par les équations [10], [45] et [51] naissent de l'intégrale $-2m^2\int R'dv$, en vertu de la *simple élimination* de la longitude moyenne $n't$ de la Terre en fonction de la longitude v de la Lune: et, à ce titre, ils doivent être conservés, comme tous les autres de la forme $A\epsilon'^2$ donnés par le développement des fonctions $\delta R''$, $\delta R'$ qui entrent dans le second membre de l'équation fondamentale (II)'' donné à la page 277 du premier Volume de ma Théorie du mouvement de la Lune. Ces termes sont les seuls, qui doivent être ajoutés aux primitifs, conformément à l'équation (k) que j'ai donnée dans le préambule de ce Mémoire.

Vers le commencement du mois d'avril dernier, je n'avais pas fait la distinction entre les fonctions séculaires $\int'\zeta dv$ et $\int''\zeta dv$: mais

des réflexions ultérieures m'ont persuadé qu'il fallait rejeter la fonction séculaire $\int^{v''} \zeta\, dv$, comme entièrement étrangère aux développemens par lesquels on forme l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune.

NOTE

sur l'expression indéfinie *de l'équation séculaire du moyen mouvement de la Lune*.

Il y a une différence essentielle entre le développement de l'intégrale $\int \zeta\, dv$ suivant les puissances du temps t, et son expression finie en termes progressifs et périodiques. Pour fixer les idées sur cette importante différence, voici comment on obtient l'équation qui doit être rapprochée de celle désignée par (k'). Soit

$$H = M^2 + M'^2 + M''^2 + M'''^2 + M^{\text{iv}\,2} + M^{\text{v}\,2} + M^{\text{vi}\,2} - E'^2 = \Sigma . M^2 - E'^2 ;$$

les sept coefficiens M, M', ... M^{vi} étant ceux qui doivent être pris dans la formation des deux équations

$$\epsilon' \cos. \tau' = \Sigma . M \cos. (at + q) ;$$

$$\epsilon' \sin. \tau' = \Sigma . M \sin. (at + q) ;$$

de manière qu'ils répondent respectivement aux arcs a, b, c, d, e, f, g; l'unité du temps t étant l'année Julienne de $365^{\text{j}} \frac{1}{4}$.

En faisant le carré de ces deux équations, leur somme donnera

$$\epsilon'^2 = \Sigma . M^2 + \Sigma . 2MM' \cos. (at - bt + q - q') :$$

et en faisant $t = 0$, on doit avoir

$$E'^2 = \Sigma . M^2 + \Sigma . 2MM' \cos. (q - q') .$$

Il suit de là, que, en intégrant depuis $t=0$, l'on a

$$\int(\varepsilon'^2-E'^2)\,n\,dt=-nt\cdot\Sigma\cdot 2MM'\cos.(q-q')$$
$$+n\cdot\Sigma\cdot\frac{2MM'}{a-b}\Big\{\sin.(at-bt+q-q')-\sin.(q-q')\Big\};$$

partant il est clair que l'on a;

$$\int(\varepsilon'^2-E'^2)\,n\,dt=nt\Big\{\Sigma\cdot M^2-E'^2\Big\}$$
$$+n\cdot\Sigma\cdot\frac{4MM'}{(a-b)}\sin.\tfrac{1}{2}(a-b)t.\cos.\Big\{\tfrac{1}{2}(a-b)t+q-q'\Big\};$$

ou bien

$$(p)\;\ldots\ldots\ldots\qquad C\int(\varepsilon'^2-E'^2)\,n\,dt=$$
$$CHnt-Cn\cdot\Sigma\cdot MM'(a-b)\sin.(q-q').\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{a-b}\right\}^2$$
$$+Cn\cdot\Sigma\cdot 2MM'\cos.(q-q').\frac{\sin.(a-b)t}{a-b}.$$

L'équation (p) démontre que l'équation séculaire $\int\zeta dv$ peut croître indéfiniment à raison du terme progressif $CHnt$, tandis que la partie périodique ne peut pas surpasser la quantité

$$Cn\Big\{\Sigma\cdot\frac{4MM'}{a-b}\sin.(q-q')+\Sigma\cdot\frac{2MM'}{a-b}\cos.(q-q')\Big\}.$$

en prenant tous les termes positivement. Elle explique une proposition de la page 282 du 5.ième Volume de la Mécanique Céleste de LAPLACE, où il est dit: « Les inégalités séculaires du mouvement de révolution de » la Lune s'élévant à *plusieurs circonférences* etc. ».

En prenant pour M, M', M'', ... M^{VI} les valeurs numériques données par M.r LE VERRIER à la page 38 des Additions à la Connaissance des Temps pour l'année 1843, on aura $\Sigma\cdot M^2=0,001177065$ (*).

(*) D'après les valeurs de M, M', ... M^{V}, données par LAGRANGE à la page 272 du Volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1782, l'on a $\Sigma.M^2=0,001194435$: c'est-à-dire une quantité fort approchante de celle calculée avec des valeurs plus exactes des masses des planètes.

Le premier janvier de l'année 1801, à l'instant de midi moyen à l'Observatoire de Paris, on avait, pour l'excentricité E' de l'orbite de la Terre, $E' = 0,016792$: partant

$$H = 0,001177065 - 0,000281971 = 0,000895679 \ .$$

Les observations du siècle passé ont donné $n = 1732559354''$ pour le moyen mouvement sidéral de la Lune en cent années Juliennes. Donc $CHn = 13759'',4$. Il suit de là, que, abstraction faite de toute inégalité absolument périodique, si l'on fait

$$N = 1732559354'' - 13759'' = 1732545595'' \ ,$$

l'on aura $N\left(\frac{t}{100}\right)$ pour expression du véritable moyen mouvement sidéral de la Lune; le temps t étant évalué en années Juliennes de $365^j \frac{1}{4}$. De sorte que, depuis le commencement du 19ième siècle, l'on a (pour un temps illimité)

$$v = 111^\circ.36'.43'' + N\left(\frac{t}{100}\right) + \textit{des termes périodiques} \ ,$$

pour expression de la longitude vraie de la Lune, comptée depuis l'équinoxe fixe.

Conformément aux résultats trouvés par M.r Le Verrier dans ses deux Mémoires: « *Sur les variations séculaires des éléments des anciennes* « *planètes* » publiés dans les Volumes de la Connaissance des Temps pour les années 1843, 1844, je prends pour les constantes M, a, q; M', b, q'; ..... M^{vi}, g, q^{vi}, les valeurs suivantes:

$M = 0,000526$	$a = 2'',31714$	$q = 126^\circ.43'.15''$
$M' = 0,016611$	$b = 3'',72881$	$q' = 27^\circ.21'.26''$
$M'' = 0,002366$	$c = 22'',7504$	$q'' = 126^\circ.44'.8''$
$M''' = 0,010622$	$d = 5'',1124$	$q''' = 85^\circ.47'.45''$
$M^{iv} = -0,018925$	$e = 7'',5780$	$q^{iv} = 35^\circ.38'.43''$
$M^{v} = 0,011782$	$f = 16'',9920$	$q^{v} = -25^\circ.11'.33''$
$M^{vi} = -0,016913$;	$g = 17'',7161$;	$q^{vi} = -45^\circ.28'.59''$.

Cela posé, si l'on fait pour plus de simplicité;

$MM' \sin.(q-q') = (1)$; $MM' \cos.(q-q') = [1]$;

$MM'' \sin.(q-q'') = (2)$; $MM'' \cos.(q-q'') = [2]$;

etc. ; etc. ;

l'on aura

Log. (1) = 4, 935556 (+)	Log [1] = 4, 1527801 (—)
(2) = 0, 5048511 (—)	[2] = 4, 0950004 (+)
(3) = 4, 5634801 (+)	[3] = 4, 6254654 (+)
(4) = 4, 9979452 (—)	[4] = 3, 2715062 (+)
(5) = 4, 4650472 (+)	[5] = 4, 7377897 (—)
(6) = 4, 0816207 (—)	[6] = 4, 9451733 (+)
(7) = 5, 5885666 (—)	[7] = 4, 8064725 (—)
(8) = 6, 1770825 (—)	[8] = 5, 9654455 (+)
(9) = 5, 6562462 (+)	[9] = 6, 4928717 (—)
(10) = 6, 1913706 (+)	[10] = 6, 0755703 (+)
(11) = 6, 4288407 (—)	[11] = 5, 9184920 (—)
(12) = 5, 2166378 (+)	[12] = 5, 2783976 (+)
(13) = 5, 6509720 (—)	[13] = 3, 9304387 (+)
(14) = 5, 1178671 (+)	[14] = 5, 3908782 (—)
(15) = 4, 7338339 (—)	[15] = 5, 5982177 (+)
(16) = 6, 1884512 (—)	[16] = 6, 1099461 (—)
(17) = 6, 0676025 (+)	[17] = 5, 6515793 (—)
(18) = 6, 1303602 (—)	[18] = 6, 0737897 (+)
(19) = 6, 2893905 (—)	[19] = 6, 036341 (—)
(20) = 6, 5000294 (+)	[20] = 5, 6934024 (+)
(21) = 5, 8394949 (—).	[21] = 6, 2716174 (—).

Actuellement, si l'on fait :

$$MM'\,(a-b)\ \sin.(q-q')=(1).(a-b)=(1)'\ ;$$
$$MM''(a-c)\ \sin.(q-q'')=(2).(a-c)=(2)'\ ;$$
etc. ;
$$MM'\,(a-b)^2\cos.(q-q')=[1].(a-b)^2=[1]'\ ;$$
$$MM''(a-c)^2\cos.(q-q'')=[2].(a-c)^2=[2]'\ ;$$
etc. ;

l'on aura

Log. $(1)'=5,0852888\,(-)$	Log. $[1]'=4,4522465\,(-)$
$(2)'=1,8151887\,(+)$	$[2]'=6,7156756\,(+)$
$(3)'=5,0099013\,(-)$	$[3]'=5,5183078\,(+)$
$(4)'=5,7190020\,(+)$	$[4]'=4,7136218\,(+)$
$(5)'=5,6316212\,(-)$	$[5]'=7,0709377\,(-)$
$(6)'=5,2691132\,(+)$	$[6]'=7,3201583\,(+)$
$(7)'=6,8678365\,(+)$	$[7]'=7,3650123\,(-)$
$(8)'=6,3170931\,(+)$	$[8]'=6,2454667\,(+)$
$(9)'=6,2416167\,(-)$	$[9]'=7,6636127\,(-)$
$(10)'=7,3140190\,(-)$	$[10]'=8,3208671\,(+)$
$(11)'=7,5745747\,(+)$	$[11]'=8,2099600\,(-)$
$(12)'=6,4630871\,(+)$	$[12]'=7,7712962\,(+)$
$(13)'=6,8320149\,(-)$	$[13]'=6,2925245\,(+)$
$(14)'=5,8782489\,(+)$	$[14]'=6,9114818\,(-)$
$(15)'=5,4357730\,(-)$	$[15]'=7,0020959\,(+)$
$(16)'=6,5803738\,(+)$	$[16]'=6,8937913\,(-)$
$(17)'=7,1424185\,(-)$	$[17]'=7,8012113\,(-)$
$(18)'=7,2308582\,(+)$	$[18]'=8,2747857\,(+)$
$(19)'=7,2631647\,(+)$	$[19]'=7,9835825\,(-)$
$(20)'=7,5059860\,(-)$	$[20]'=7,7053156\,(+)$
$(21)'=5,6992934\,(+)$.	$[21]'=5,9912144\,(-)$.

Cela posé, remarquons que la formule (p) peut être écrite ainsi

$$(p') \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad C\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,n\,dt =$$

$$-\,Cn.(10)^4 \sin. 1''.\Sigma.(a-b)MM' \sin.(q-q')\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{100(a-b)}\right\}^2$$

$$-\,2Cn.\Sigma.MM'\cos.(q-q')\left\{t - \frac{\sin.(a-b)t}{(a-b)}\right\}.$$

Mais nous avons;

$$\text{Log.}\,C = 7,9467613\ ; \qquad \text{Log.}\,n = 7,2386845\ ;$$

$$\text{Log.}\,[2\,Cn] = 5,4865758\ ; \qquad \text{Log.}\left[(10)^4 Cn \sin. 1''\right] = 3,8710207\ ;$$

donc, en ajoutant ces logarithmes constans aux logarithmes des quantités [1], [2], etc.; (1)', (2)', etc.; l'on aura ce résultat très-remarquable; savoir:

$$(p'') \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad C\int(\varepsilon'^2 - E'^2)\,n\,dt =$$

$$+\ 0'',090429\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{100(a-b)}\right\}^2 +\ 0'',43578\left\{t - \frac{\sin.(a-b)t}{a-b}\right\}$$

$$-\ 0'',000048\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-c)t}{100(a-c)}\right\}^2 -\ 0'',38157\left\{t - \frac{\sin.(a-c)t}{a-c}\right\}$$

$$+\ 0'',076019\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-d)t}{100(a-d)}\right\}^2 -\ 1'',29432\left\{t - \frac{\sin.(a-d)t}{a-d}\right\}$$

$$-\ 0'',\ 38916\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-e)t}{100(a-e)}\right\}^2 -\ 0'',05729\left\{t - \frac{\sin.(a-e)t}{a-e}\right\}$$

$$+\ 0'',\ 31826\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-f)t}{100(a-f)}\right\}^2 +\ 1'',67635\left\{t - \frac{\sin.(a-f)t}{a-f}\right\}$$

$$-\ 0'',\ 13808\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-g)t}{100(a-g)}\right\}^2 -\ 2'',70240\left\{t - \frac{\sin.(a-g)t}{a-g}\right\}$$

$$-\ 5'',\ \ 4809\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-c)t}{100(b-c)}\right\}^2 +\ 1'',96358\left\{t - \frac{\sin.(b-c)t}{b-c}\right\}$$

$$- 1'',\ 5421 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-d)t}{100(b-d)}\right\}^2 - 28'',\ 31530 \left\{t - \frac{\sin.(b-d)t}{b-d}\right\}$$

$$+ 1'',\ 2961 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-e)t}{100(b-e)}\right\}^2 + 95'',\ 3669 \left\{t - \frac{\sin.(b-e)t}{b-e}\right\}$$

$$+ 15'',\ 3123 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-f)t}{100(b-f)}\right\}^2 - 36'',\ 4793 \left\{t - \frac{\sin.(b-f)t}{b-f}\right\}$$

$$- 27'',\ 8996 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(b-g)t}{100(b-g)}\right\}^2 + 25'',\ 41370 \left\{t - \frac{\sin.(b-g)t}{b-g}\right\}$$

$$- 2'',\ 15830 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-d)t}{100(c-d)}\right\}^2 - 5'',\ 8207 \left\{t - \frac{\sin.(c-d)t}{c-d}\right\}$$

$$+ 5'',\ 04702 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-e)t}{100(c-e)}\right\}^2 - 0'',\ 26123 \left\{t - \frac{\sin.(c-e)t}{c-e}\right\}$$

$$- 0'',\ 56129 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-f)t}{100(c-f)}\right\}^2 + 7'',\ 54143 \left\{t - \frac{\sin.(c-f)t}{c-f}\right\}$$

$$+ 0'',\ 20267 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(c-g)t}{100(c-g)}\right\}^2 - 12'',\ 1561 \left\{t - \frac{\sin.(c-g)t}{c-g}\right\}$$

$$- 2'',\ 82745 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(d-e)t}{100(d-e)}\right\}^2 + 39'',\ 4841 \left\{t - \frac{\sin.(d-e)t}{d-e}\right\}$$

$$+ 10'',\ 3143 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(d-f)t}{100(d-f)}\right\}^2 + 13'',\ 7453 \left\{t - \frac{\sin.(d-f)t}{d-f}\right\}$$

$$- 12'',\ 6439 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(d-g)t}{100(d-g)}\right\}^2 - 36'',\ 3384 \left\{t - \frac{\sin.(d-g)t}{d-g}\right\}$$

$$- 13'',\ 6203 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(e-f)t}{100(e-f)}\right\}^2 + 33'',\ 3050 \left\{t - \frac{\sin.(e-f)t}{e-f}\right\}$$

$$+ 23'',\ 8239 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(e-g)t}{100(e-g)}\right\}^2 - 15'',\ 1348 \left\{t - \frac{\sin.(e-g)t}{e-g}\right\}$$

$$- 0'',\ 3718 \left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(f-g)t}{100(f-g)}\right\}^2 + 57'',\ 3051 \left\{t - \frac{\sin.(f-g)t}{f-g}\right\}.$$

Les élémens employés dans le calcul de cette formule donnent, pour l'excentricité E' de l'orbite de la Terre, et pour la longitude de τ' du perihélie, les valeurs qui avaient lieu, effectivement, au commencement du $19^{\text{ème}}$ siècle: car l'on en tire

$$\Sigma \cdot M \sin. q = + 0,0165601 \; ; \qquad \Sigma \cdot M \cos. q = - 0,0027376 \; ;$$

$$E' = \sqrt{(\Sigma \cdot M \sin. q)^2 + (\Sigma \cdot M \cos. q)^2} = 0,01679091 \; ;$$

$$\text{tang.}\, \tau' = \frac{\Sigma \cdot M \sin. q}{\Sigma \cdot M \cos. q} \; ; \qquad \tau' = 99^\circ.\, 30' 31'' \; .$$

En développant les *sinus*, le terme multiplié par la première puissance du temps t disparaît dans le second membre de l'équation (p'') et l'on a une série de la forme

$$(p''') \; \ldots\ldots\ldots \qquad C \int (\varepsilon'^2 - E'^2)\, n\, dt =$$
$$A \left(\frac{t}{100}\right)^2 + A' \left(\frac{t}{100}\right)^3 + A'' \left(\frac{t}{100}\right)^4 + \text{etc.}$$

Le coefficient A est immédiatement connu par la sommation des 21 parties qui le composent. Et pour obtenir le coefficient A' il suffira d'ajouter aux logarithmes des quantités $[1]'$, $[2]'$, etc., le logarithme constant

$$\text{Log.} \left\{ \frac{(10)^6}{3} . \, Cn . \sin.^2 1'' \right\} = 0,0793744 \; ,$$

et de changer ensuite le signe du nombre correspondant. On trouve ainsi;

$$A = - 11'', 5193 \; ; \qquad A' = - 0'', 0153379 \; .$$

Il y a donc un accord satisfaisant entre ces derniers résultats et ceux obtenus dans le préambule de ce Mémoire. Et la formule finie (p'') conserve en outre le très-grand avantage d'être appliquable pour un temps illimité, ou du moins pour un fort grand nombre de siècles.

On ne doit pas oublier que les erreurs encore existantes sur les quantités M, a, q; M', b' q'; etc. dépendantes de la masse des planètes, empêchent d'attribuer à cette formule une exactitude sans bornes. Elle donne la loi de la variation séculaire du moyen mouvement de la

Lune, mais on sera forcé de modifier les quantités constantes qui multiplient le temps, à mesure que, par les observations, on découvrira quelques-unes des petites variations qui peuvent encore affecter les masses adoptées pour les sept planètes plus anciennes.

Le terme progressif $137'', 29583.t$, que la formule (p'') renferme est associé aux termes périodiques d'une manière indestructible, mathématiquement parlant. C'est dans l'acte du développement suivant les puissances de t que ce terme disparaît. La série ainsi obtenue a perdu le caractère de la périodicité, qui est inhérent à ses différens termes; néanmoins, la petitesse des différences $a-b$, $a-c$, etc., nous démontre que les deux premiers termes

$$A\left(\frac{t}{100}\right)^2+A'\left(\frac{t}{100}\right)^3$$

du développement de l'équation séculaire, suffisent pour comparer avec la théorie les plus anciennes éclipses dont nous avons connaissance avec certitude.

L'équation (p'') étant mise sous la forme

$$C\int(\epsilon'^2-E'^2)n\,dt-137'', 29583.t$$
$$=\Sigma.G\left\{\frac{2\sin.\frac{1}{2}(a-b)t}{100(a-b)}\right\}^2+\Sigma.H.\frac{\sin.(a-b)t}{a-b}$$

on voit que le second membre sera composé de la somme, ou de la différence des deux *mêmes* nombres, relativement à deux valeurs de t égales et de signe contraire: par exemple, en faisant successivement $t=-(10)^4$, $t=(10)^4$ on obtient;

$$-83749'', 26+1387870'', 88=+362°.\ 15'.\ 22''\ ;$$

$$-83749'', 26-1387870'', 88=-408°.\ 47'.\ 0''\ .$$

De sorte que le centre de gravité de la Lune, depuis le 1.er janvier de l'année 8999 avant notre ère, a parcouru (abstraction faite des inégalités à courte période) un arc égal à $N(10)^4+362°.\ 15'.\ 22''$; tandis que, depuis le 1.er janvier de l'année 1801 jusqu'au 1.er janvier de l'année

11801, l'arc parcouru sera égal à $N(10)^4 + 408°.\ 47'.\ 0''$; le coefficient N étant égal à $17325455'',95$.

On avait à la première de ces deux époques;

$$E' = \textit{excentricité de l'orbite de la Terre} = 0,0187\ ;$$

et à la seconde on aura :

$$E' = 0,0115\ .$$

On peut développer de la même manière l'intégrale

$$C'.\int dv.(\varepsilon'^4 - E'^4)\ ,$$

qui fait partie de l'équation séculaire. En effet; nous avons l'équation

$$\varepsilon'^4 - E'^4 = (\Sigma \cdot M^2)^2 - E'^4 + \{\varepsilon'^2 - \Sigma \cdot M^2\}\, 2 \cdot \Sigma \cdot M^2$$
$$+ \{\Sigma \cdot 2MM' \cos.(at - bt + q - q')\}^2\ ,$$

qui donne;

$$\varepsilon'^4 - E'^4 = -\{E'^2 - \Sigma \cdot M^2\}^2 + \{\varepsilon'^2 - E'^2\}\, 2 \cdot \Sigma \cdot M^2$$
$$+ \{\Sigma \cdot 2MM' \cos.(at - bt + q - q')\}^2\ .$$

Donc, en multipliant par $C'.ndt$, et intégrant, il viendra

$$C'.\int ndt(\varepsilon'^4 - E'^4) =$$
$$-C'.\{E'^2 - \Sigma \cdot M^2\}^2 nt + 2C' \cdot \Sigma \cdot M^2.\int ndt(\varepsilon'^2 - E'^2)$$
$$+ C'.\int ndt\{\Sigma \cdot 2MM' \cos.(at - bt + q - q')\}^2\ .$$

Mais

$$E'^2 - \Sigma \cdot M^2 = -H = -0,000895679\ ,$$

et

$$\text{Log.}\, C'n = 5,8933326\ ;$$

partant l'on a

$$C'.\int ndt(\varepsilon'^4 - E'^4) =$$
$$-0'',627535.t + 0,000106286\int ndt(\varepsilon'^2 - E'^2)$$
$$+ C'.\int ndt\{\Sigma \cdot 2MM' \cos.(at - bt + q - q')\}^2\ .$$

Actuellement, si l'on fait

$$MM' = N_{(1)}\ ; \quad MM'' = N_{(2)} \ldots\ldots\ ; \quad M^{v}M^{vi} = N_{(21)}\ ;$$

$$\varphi_{(1)} = (a-b)t + q - q''\ ; \quad \varphi_{(2)} = (a-c)t + q - q''\ ;$$

$$\varphi_{(3)} = (a-d)t + q - q'''\ ; \ \ldots\ldots\ ; \quad \varphi_{(21)} = (f-g)t + q^{v} - q^{vi}\ ;$$

on trouvera, avec les valeurs numériques précédentes;

$$C'.nt.\Sigma.N^2_{(1)} = t.0'',386276\ ;$$

ce qui donne, en développant le polynome compris sous le signe $\Sigma\cdot$, et intégrant;

$$C'.\int n\,dt\,(\varepsilon'^2 - E'^2) =$$

$$-t.0'',241259 + 0,000106282.\int n\,dt.(\varepsilon'^2 - E'^2)$$

$$+\frac{1}{2}C'n\cdot\Sigma\cdot\frac{N^2_{(1)}}{\varphi'_{(1)}}.\sin.2\varphi_{(1)}$$

$$+2C'n\cdot\Sigma\cdot\frac{N_{(1)}\cdot N_{(2)}}{\varphi'_{(1)}+\varphi'_{(2)}}\sin.(\varphi_{(1)}+\varphi_{(2)})$$

$$+2C'n\cdot\Sigma\cdot\frac{N_{(1)}\cdot N_{(2)}}{\varphi'_{(1)}-\varphi'_{(2)}}\sin.(\varphi_{(1)}-\varphi_{(2)})\ .$$

Dans cette équation l'on a fait;

$$\varphi'_{(1)} = \frac{d\varphi_{(1)}}{dt}\ , \qquad \varphi'_{(2)} = \frac{d\varphi_{(2)}}{dt}\ ; \qquad \text{etc.}$$

Le premier signe $\Sigma\cdot$, multiplié par $\frac{1}{2}\cdot C'n$, comprend une somme composée de 21 termes: chacun des deux autres en comprend 210. Pour le moment il suffit d'avoir réduit cette seconde intégrale à des termes que l'on peut calculer à l'aide des élémens qui nous ont donné tous les termes de la première.

Turin, ce 29 mai 1856.

JEAN PLANA.

ERRATA (*)

DU TOME PREMIER

DE LA THÉORIE DU MOUVEMENT DE LA LUNE.

Page	Ligne	
61.	4	*(en remontant).* On doit ajouter à la valeur de x le troisième terme $+\frac{Bm}{k^2}\varepsilon'^{m-1}\frac{d\varepsilon'}{dv}\sin.(kv+\beta-n\tau')$
533.	4	$\sin. 2Ev+2gv-2cv.e^2\gamma^2\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{16}+\frac{15}{16}=\frac{45}{16}\right)m$
559.	2	$\sin. 2E.nt+2g.nt-2c.nt.e^2\gamma^2\left\{\frac{105}{64}-\frac{345}{64}+\frac{15}{8}=-\frac{15}{8}\right\}m$
581.	15	$\sin. 2E.nt+2g.nt-2c.nte^2\gamma^2\left(-\frac{15}{8}m\right)$
611.	11	$\sin. 2Ev+2gv-2cv\}-0'',464\ (5)\{$
635.	10	$+\frac{225}{64}m^2e^2$ au lieu de $+\frac{45}{64}m^3e^2$
	11	$+\frac{2115}{128}m^3e^2$ au lieu de $+\frac{2475}{128}m^3e^2$
636.	4	$\left(+\frac{225}{64}+\frac{1}{6}=\frac{707}{192}\right)m^2e^2+\frac{2115}{128}m^3e^2$
	6	$+\left(\frac{225}{64}+\frac{1}{6}=\frac{707}{192}\right)m^2e^2$
658.	15	$-\left(\frac{165}{128}+\frac{15}{4}+\frac{165}{128}=\frac{405}{64}\right)m^3$

(*) Je profite de cette circonstance pour publier cet *Errata.*